36,00
P. LAB

Walter Spinelli
M. Helena S. Souza

MATEMÁTICA COMERCIAL E FINANCEIRA

editora ática

Walter Spinelli
Licenciado em Física pelo Instituto de Física da USP
Professor de Física e Matemática do 2º Grau

Maria Helena Soares de Souza
Licenciada em Matemática pela Faculdade de
Filosofia, Ciências e Letras da USP
Professora de Matemática do 2º Grau

MATEMÁTICA COMERCIAL e FINANCEIRA

14ª edição
3ª impressão

Editor
João Guizzo

Coordenação da edição
Cármen Sílvia Rela Matricardi

Preparação de originais
Angélica Natalia Pizzuto

Revisão
Cláudia Carvalho Neves
Hélia de Jesus Gonsaga (coord.)
Kátia Scaff Marques
Mirian Senra

Edição de arte/Computação gráfica
Wander Camargo Silva

Capa
Isabel Carballo

EDITORA AFILIADA

Impressão e acabamento
W. ROTH– (011) 6436-2288

ISBN 85 08 07018 7

2003

Todos os direitos reservados pela **Editora Ática**
Rua Barão de Iguape, 110 – CEP 01507-900
Caixa Postal 2937 – CEP 01065-970
São Paulo – SP
Tel.: 0XX 11 3346-3000 – Fax: 0XX 11 3277-4146
Internet: http://www.atica.com.br
e-mail: editora@atica.com.br

APRESENTAÇÃO

Ao elaborarmos este livro de *Matemática Comercial e Financeira*, nosso objetivo foi tornar acessível ao estudante a aquisição dos conceitos básicos dessa disciplina. Para isso, os assuntos são introduzidos a partir de um problema prático e sua resolução é feita em linguagem simples e direta, mas com o rigor matemático necessário.

Dividimos o livro em duas unidades. Na primeira — Matemática Comercial — fornecemos aos alunos uma sólida base do conceito de porcentagem. Na segunda unidade — Matemática Financeira — procuramos apresentar e exemplificar, através de situações bem reais, assuntos como juros compostos, descontos, capitalização e amortização.

O livro contém grande número de exercícios resolvidos, apresentados de forma a facilitar a compreensão dos conceitos, e de exercícios propostos, para o aluno fixar e aplicar em novas situações os conceitos apresentados. Selecionamos ainda problemas e testes de concursos e questões de vestibulares que constituem um desafio à inteligência dos alunos.

Esperamos que esse trabalho corresponda à expectativa de professores e alunos e agradecemos toda sugestão que nos enviarem para seu aperfeiçoamento didático.

Os Autores

ÍNDICE

UNIDADE 1 ▪ MATEMÁTICA COMERCIAL

- **CAPÍTULO 1 — RAZÕES E PROPORÇÕES** 7
  1. Introdução 7
  2. Razão 7
  3. Proporção 9
- **CAPÍTULO 2 — GRANDEZAS PROPORCIONAIS E DIVISÃO PROPORCIONAL** 18
  1. Introdução 18
  2. Proporção direta 18
  3. Proporção inversa 19
  4. Divisão em partes proporcionais 21
- **CAPÍTULO 3 — REGRA DE SOCIEDADE** 32
  1. Introdução 32
  2. Regra de sociedade simples 33
  3. Regra de sociedade composta 35
- **CAPÍTULO 4 — REGRA DE TRÊS** 42
  1. Introdução 42
  2. Regra de três simples 42
  3. Regra de três composta 46
  4. Câmbio 52
- **CAPÍTULO 5 — PORCENTAGEM** 60
  1. Introdução 60
  2. Porcentagem 60
  3. Taxa porcentual 63
  4. Operações de venda que utilizam porcentagens 67
  5. Algumas aplicações práticas de porcentagem 75
- **CAPÍTULO 6 — JUROS SIMPLES** 85
  1. Introdução 85
  2. Juros simples 85
  3. Taxa e período 88
  4. Montante 91
  5. A tabela de juros simples 94
- **CAPÍTULO 7 — DESCONTOS SIMPLES** 102
  1. Introdução 102
  2. Títulos 102
  3. Desconto bancário 104
  4. Desconto racional 107
  5. Prazo médio 111
  6. Taxa média 115
- **TESTES E QUESTÕES DE VESTIBULARES** 123

UNIDADE 2 ▪ MATEMÁTICA FINANCEIRA

- **CAPÍTULO 8 — LOGARITMOS** 129
  1. Introdução 129
  2. Definição 130
  3. Propriedades dos logaritmos 134
  4. Logaritmos decimais 140
- **CAPÍTULO 9 — JUROS COMPOSTOS** 147
  1. Introdução 147
  2. Juros compostos 147
  3. Montante 149
  4. Taxas equivalentes 156
- **CAPÍTULO 10 — DESCONTOS** 164
  1. Introdução 164
  2. Valor atual 164
  3. Desconto composto 165
- **CAPÍTULO 11 — CAPITALIZAÇÃO E AMORTIZAÇÃO** 172
  1. Introdução 172
  2. Rendas 172
  3. Capitalização composta 173
  4. Amortização 180
- **CAPÍTULO 12 — EMPRÉSTIMOS E PLANOS DE AMORTIZAÇÃO** 194
  1. Introdução 194
  2. Sistema Francês de Amortização 194
  3. Tabela Price 201
  4. Sistema de Amortização Constante (SAC) ou Sistema Hamburguês 202
  5. Sistema de Amortização Misto (SAM) 207
  6. Sistema Americano 209
  7. Plano livre de amortização 210
- **TESTES E QUESTÕES DE VESTIBULARES** 213
- **TABELAS** 217
- **RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS** 227
- **BIBLIOGRAFIA** 239
- **SIGNIFICADO DAS SIGLAS** 239

UNIDADE 1

MATEMÁTICA COMERCIAL

CAPÍTULO 1

RAZÕES E PROPORÇÕES

1. Introdução

Se a sua mensalidade escolar sofresse hoje um reajuste de $ 80,00, como você reagiria? Acharia caro, normal ou abaixo da expectativa? Apesar de parecer caro no reajuste da mensalidade, esse mesmo valor seria considerado insignificante caso se tratasse de um acréscimo no seu salário.

Naturalmente, você já percebeu que os $ 80,00 nada representam, se não forem comparados a um valor-base e avaliados de acordo com a natureza da comparação. Por exemplo, se a mensalidade escolar fosse de $ 90,00, o reajuste poderia ser considerado alto; afinal, o valor da mensalidade teria quase dobrado. Já no caso de um salário de $ 1 000,00, os $ 80,00 não seriam muito significativos.

A fim de esclarecer melhor esse tipo de problema, vamos estabelecer regras para a comparação entre grandezas.

2. Razão

Você já deve ter ouvido expressões como: "De cada 20 habitantes, 5 são analfabetos", "De cada 10 alunos, 2 gostam de Matemática", "Um dia de sol, para cada dois de chuva".

Em cada uma dessas frases está sempre clara uma *comparação* entre dois números. Assim, no primeiro caso, destacamos 5 entre 20; no segundo, 2 entre 10, e no terceiro, 1 para cada 2.

Todas as comparações são matematicamente expressas por um quociente chamado *razão*. Temos, então:

1) De cada 20 habitantes, 5 são analfabetos.

$$\text{Razão} = \frac{5}{20}$$

2) De cada 10 alunos, 2 gostam de Matemática.

Razão $= \frac{2}{10}$

3) Um dia de sol, para cada dois de chuva.

Razão $= \frac{1}{2}$

A razão entre dois números **a** e **b**, com $b \neq 0$, é o quociente $\frac{a}{b}$, ou $a : b$.

Na expressão acima, **a** é chamado *antecedente* e **b** *conseqüente*.

Outros exemplos de razão:

1) Em cada 10 terrenos vendidos, 1 é do corretor.

Razão $= \frac{1}{10}$

2) Os times **A** e **B** jogaram 6 vezes e o time **A** ganhou todas.

Razão $= \frac{6}{6}$

3) Uma liga de metal é feita de 2 partes de ferro e 3 partes de zinco.

Razão $= \frac{2}{5}$ (ferro) Razão $= \frac{3}{5}$ (zinco)

Observação: nos exemplos anteriores, todas as razões têm o antecedente menor que o conseqüente. Isso porque consideramos a razão tomada da parte para o todo, mas você também pode escrevê-la de forma inversa.

Exemplo:

João acertou 10 dos 15 problemas que resolveu.

Razão $= \frac{10}{15}$ (parte para o todo)

Razão $= \frac{15}{10}$ (do todo para a parte)

Exercícios propostos

1) Estabeleça a razão em cada caso:
   a) De cada 30 carros vistoriados, 7 não estão em perfeitas condições.
   b) De cada 40 camisetas fabricadas, 1 sai com defeito.
   c) Trabalho 4 horas e descanso 1.

2) O censo de uma cidade mostrou que 1 300 pessoas tinham idade acima de 40 anos, 26 000 estavam entre 20 e 40 anos de idade e 30 000 eram menores de 20 anos. Estabeleça a razão entre:
   a) os habitantes com mais de 40 anos e os de 20 a 40 anos;
   b) os habitantes com mais de 40 anos e todos os habitantes da cidade;
   c) os menores de 20 anos e todos os habitantes da cidade.

3. Proporção

Há situações em que as grandezas que estão sendo comparadas podem ser expressas por razões de antecedentes e conseqüentes diferentes, porém com o mesmo quociente. Assim, ao dizer que de 40 alunos entrevistados 10 gostam de Matemática, poderemos supor que, se forem entrevistados 80 alunos da mesma escola, 20 deverão gostar de Matemática. Na verdade, estamos afirmando que 10 estão representando em 40 o mesmo que 20 em 80.

Escrevemos:

$$\frac{10}{40} = \frac{20}{80}$$

A esse tipo de igualdade entre duas razões dá-se o nome de *proporção*.

Dadas duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ com **b** e **d** $\neq 0$,

teremos uma *proporção* se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Na expressão acima, **a** e **c** são chamados de *antecedentes* e **b** e **d** *conseqüentes*.

A proporção também pode ser representada como a:b::c:d. Qualquer uma dessas expressões é lida assim: **a** está para **b** assim como **c** está para **d**. É importante notar que **b** e **c** são denominados *meios* e **a** e **d**, *extremos*.

Exemplo:

A proporção $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$, ou 3:7::9:21, é lida da seguinte forma:

3 está para 7 assim como 9 está para 21.

Então temos:

- 3 e 9 como antecedentes,
- 7 e 21 como conseqüentes,
- 7 e 9 como meios e
- 3 e 21 como extremos.

Propriedade fundamental

O produto dos extremos é igual ao produto dos meios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc\,(b, d \neq 0)$$

Exemplo:

Se $\frac{6}{24} = \frac{24}{96}$, então $6 \cdot 96 = 24 \cdot 24 = 576$.

Exercícios resolvidos

1) Escrever uma proporção com os números 3, 20, 5 e 12.

Solução

Há várias proporções possíveis. Dessa forma, temos:

$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, $\frac{3}{12} = \frac{5}{20}$, $\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ e assim por diante.

2) Calcular o valor de **x** na proporção $\frac{x}{40} = \frac{80}{200}$.

Solução

Usando a propriedade fundamental, temos:

$200 \cdot x = 40 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{3\,200}{200} \Rightarrow x = 16$

Resposta: $x = 16$

3) Dados os números 2, 7 e 10, determinar um quarto número que, junto com esses e nessa ordem, forme uma proporção.

Solução

$2 : 7 :: 10 : x$

$\frac{2}{7} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow 2x = 10 \cdot 7 \Rightarrow x = 35$

O número encontrado, neste caso o 35, é chamado de *quarta proporcional*.

Resposta: O número é 35.

4) Determinar **x** e **y** na proporção $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{2}{6}$.

Solução

Separando as igualdades, temos:

$$\frac{x}{5} = \frac{2}{6} \Leftrightarrow 6x = 2 \cdot 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow 6y = 2 \cdot 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

Resposta: $x = \frac{5}{3}$ e $y = \frac{4}{3}$

Exercícios propostos

3) Verifique se são verdadeiras as proporções:

a) $\frac{25}{45} = \frac{5}{9}$

b) $\frac{15}{24} = \frac{6}{8}$

c) $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$

d) $\frac{68}{17} = \frac{76}{19}$

e) $\frac{0,75}{0,25} = \frac{3}{1}$

f) $\frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} : \frac{1}{2}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{8}} = \frac{104}{10}$

g) $\frac{9,5 - 4,8}{2} = \frac{14,1}{60}$

h) $\frac{3,5 : 0,7}{2,1 \cdot 2} = \frac{2,5}{4,2}$

4) Determine o valor de **x** nas proporções:

a) $\frac{2}{3} = \frac{8}{x}$

b) $\frac{12}{121} = \frac{6}{x}$

c) $\frac{x}{4} = \frac{18}{24}$

d) $\frac{81}{108} = \frac{x}{12}$

e) $\frac{x}{3} = \frac{75}{15}$

f) $\frac{x}{15,5 - 10,2} = \frac{2,4}{12,72}$

g) $\frac{x + 4}{125} = \frac{2}{25}$

h) $\frac{x + 2}{2} = \frac{-2}{x - 3}$

i) $\frac{x - 2}{x} = \frac{2 + x}{x - 4}$

j) $\frac{\frac{1}{2} + x}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}}$

5) Determine **x** e **y** nas proporções:

a) $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{2,5}{x} = \frac{7}{y} = \frac{4}{1}$

c) $\frac{x + 2}{4} = \frac{2 + y}{5} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{x - 3}{2} = \frac{4y + 3}{2} = \frac{-2}{x + 1}$

Adição (ou subtração) dos antecedentes e conseqüentes

Em toda proporção, a soma (ou diferença) dos antecedentes está para a soma (ou diferença) dos conseqüentes assim como cada antecedente está para seu conseqüente. Ou seja:

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então } \frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ ou } \frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Essa propriedade é válida desde que nenhum denominador seja nulo.

Exemplo:

$$\frac{21}{12} = \frac{7}{4} \begin{cases} \rightarrow \frac{21 + 7}{12 + 4} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4} \\ \rightarrow \frac{21 - 7}{12 - 4} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

5) Calcular **x** e **y** na proporção $\frac{x}{7} = \frac{y}{12}$, sabendo que $x + y = 76$.

Solução

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{12} \Rightarrow \frac{x + y}{7 + 12} = \frac{x}{7}$$

Mas:

$$x + y = 76 \Rightarrow \frac{76}{19} = \frac{x}{7} \Rightarrow 76 \cdot 7 = 19x \Rightarrow x = \frac{532}{19} = 28$$

Então:

$$x + y = 76 \Rightarrow y = 76 - x = 76 - 28 = 48$$

Resposta: $x = 28$ e $y = 48$

6) Calcular **x** e **y** na proporção $\frac{x}{7,5} = \frac{y}{2,3}$, sabendo que $x - y = 20,8$.

Solução

$$\frac{x}{7,5} = \frac{y}{2,3} \Rightarrow \frac{x - y}{7,5 - 2,3} = \frac{x}{7,5} \Rightarrow \frac{20,8}{5,2} = \frac{x}{7,5} \Rightarrow 20,8 \cdot 7,5 = x \cdot 5,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{20,8 \cdot 7,5}{5,2} = x \Rightarrow x = 30$$

Mas:

$x - y = 20,8 \Rightarrow x - 20,8 = y \Rightarrow 30 - 20,8 = 9,2 \Rightarrow y = 9,2$

Resposta: $x = 30$ e $y = 9,2$

7) Água e tinta estão misturadas em um volume total de 28 L, na razão de 9 : 5. Achar o volume de cada substância.

Solução

Sabendo que a = volume de água, t = volume de tinta, temos:

$$\frac{a}{t} = \frac{9}{5} \text{ ou } \frac{a}{9} = \frac{t}{5}$$

Então:

$$\frac{a + t}{9 + 5} = \frac{a}{9}$$

Mas:

$$a + t = 28 \Rightarrow \frac{28}{14} = \frac{a}{9} \Rightarrow a = 18 \text{ L}$$

Portanto:

$a + t = 28 \Rightarrow t = 28 - 18 = 10 \Rightarrow t = 10$ L

Resposta: O volume de água é de 18 L e o de tinta é de 10 L.

8) Na série de razões $\frac{x}{10} = \frac{y}{20} = \frac{z}{14}$, calcular **x**, **y** e **z**, sabendo que $x + y + z = 88$.

Solução

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{20} = \frac{z}{14} \Rightarrow \frac{x + y + z}{10 + 20 + 14} = \frac{x}{10}$$

Então:

$$\frac{88}{44} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 20$$

$$\frac{88}{44} = \frac{y}{20} \Rightarrow y = 40$$

Logo:

$z = 88 - 60 = 28$

Resposta: $x = 20$; $y = 40$; $z = 28$

9) Na série de razões $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$, calcular **x**, **y** e **z**, sabendo que $x + 3y + 2z = 76$.

Solução

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3y}{9} = \frac{2z}{8} \Rightarrow \frac{x + 3y + 2z}{2 + 9 + 8} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{76}{19} = \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{76 \cdot 2}{19} = 8 \Rightarrow x = 8$$

Logo:

$$\frac{y}{3} = \frac{76}{19} \Rightarrow y = \frac{76 \cdot 3}{19} \Rightarrow y = 12$$

$$\frac{z}{4} = \frac{76}{19} \Rightarrow z = \frac{76 \cdot 4}{19} \Rightarrow z = 16$$

Resposta: $x = 8; y = 12; z = 16$

Exercícios propostos

6) Determine **a** e **b**, utilizando as transformações e as propriedades convenientes nas proporções abaixo:

a) $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$ e $a + b = 49$

b) $\frac{a}{10} = \frac{b}{4}$ e $a - b = 24$

c) $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ e $a + b = 20$

d) $\frac{a}{2} = \frac{b}{9}$ e $a + b = 33$

e) $\frac{a}{b} = \frac{7}{8}$ e $a + b = 30$

f) $\frac{a}{b} = \frac{11}{13}$ e $a + b = 72$

g) $\frac{a}{b} = \frac{41}{10}$ e $a - b = 93$

h) $\frac{a}{b} = \frac{10}{7}$ e $a - b = 30$

7) Duas pessoas ganharam comissões sobre vendas, sendo que uma delas recebeu $ 45,00 a mais que a outra. Descubra qual é a comissão de cada uma, sabendo que há entre elas uma razão de $\frac{4}{9}$.

8) Uma determinada substância é composta de ouro e prata, na proporção de 5 partes de ouro para cada 1 de prata. Para fabricar 54 g dessa substância, quantos gramas de ouro e de prata serão necessários?

9) Os salários de João e José estão entre si assim como 7 está para 8. Calcule esses salários, sabendo que o triplo do salário de João menos o dobro do de José é $ 5 000,00.

10) Num jogo de futebol, as torcidas do Santos e do Corinthians compareceram ao estádio numa razão de 3 para 4. Dado que a lotação nesse dia foi de 77 000 torcedores, quantos eram os santistas e quantos eram os corintianos?

11) Paula tem um retrato com as dimensões de 10 cm de largura por 12 cm de altura. Ela quer uma ampliação para 25 cm de largura. De que altura ficará o retrato?

12) Em dois tanques de combustível há 2 200 L de gasolina. Calcule o volume dos dois tanques, sabendo que suas capacidades estão na proporção de $\frac{4}{7}$.

13) Encontre **x**, **y** e **z** nas séries de razões abaixo:

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$, sendo $x + y + z = 81$

b) $x = \frac{y}{0,5} = \frac{z}{1,5}$, sendo $x + y + z = 75$

c) $\frac{x}{4} = y = \frac{z}{6}$, sendo $x + y = 45$

d) $\frac{x}{8} = \frac{y}{4}$; $\frac{y}{2} = \frac{z}{5}$, sendo $x + z = 42$

e) $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$, sendo $2x + y + z = 384$

f) $\frac{x}{2\,000} = \frac{y}{1\,500} = \frac{z}{2\,500}$, sendo $x + y + z = 120\,000$

g) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = z$, sendo $2y + 3z = 11$

h) $\frac{x}{7} = \frac{z}{3}$ e $\frac{y}{4} = \frac{z}{3}$, sendo $x + y = 33$

14) Calcule **a**; **b**, **c** e **d** na série: $\frac{3}{a} = \frac{7}{b} = \frac{5}{c} = \frac{4}{d}$, sendo $b + c = 60$.

Problemas e testes de concursos

1) (BB) A soma de três números é igual a 7 777. O primeiro está para o segundo como 4 está para 11, e a diferença entre esses dois números é igual a 805. Quais são os três números?

2) (BB) Divida o número 2 772 em três partes, de tal forma que a primeira seja igual a $\frac{1}{3}$ da segunda e que a terceira seja o dobro da primeira e segunda partes reunidas.

3) (BB) Um número foi dividido em quatro partes, de tal modo que a primeira parte está para a segunda como 5 está para 7; a segunda parte está para a terceira como 2 para 5 e a terceira parte está para a quarta como 2,5 está para 3. Sabe-se que o quíntuplo da primeira parte, menos o dobro da segunda, mais o triplo da terceira, menos o triplo da quarta tem como resultado 4. Qual é o número e quais são as partes?

4) (BB) Uma herança de $ 101 500,00 deve ser dividida entre três pessoas, de modo que a parte da primeira corresponda aos $\frac{2}{5}$ da parte da segunda e aos $\frac{3}{4}$ da parte da terceira. Quanto ficará para cada uma das três pessoas?

5) (BB) A importância de $ 21,70 foi dividida entre três pessoas. Sabendo que a parte do primeiro está para a parte do segundo como 7 para 9, e que a do segundo está para a do terceiro como 3 para 5, determine as três partes.

6) (BB) Num colégio há 210 alunos. A metade do número de meninas é igual a $\frac{1}{5}$ do número de meninos. Quantos meninos há no colégio?

7) (BB) Duas pessoas devem dividir entre si a importância de $ 180,00. A primeira pretende receber $\frac{2}{3}$ da importância total e a segunda acha que tem direito a receber $ 72,00. Por fim, concordaram em dividir a importância total proporcionalmente às respectivas pretensões. Com quanto ficou cada uma?

8) (BB) Determine quantos funcionários tem um dos maiores bancos da América Latina, sabendo que, se a este número juntássemos a sua metade, a sua terça parte e a sua quinta parte, essa organização bancária teria 24 400 funcionários.

9) (BB) Determine quantos passageiros viajam em certo ônibus, sabendo que, se 2 passageiros ocupassem cada banco, 26 ficariam de pé e que, se 3 passageiros sentassem em cada banco, 2 bancos ficariam vazios.

10) (TTN) Em uma amostra retirada de um lote de feijão, constatou-se que $\frac{3}{7}$ eram de feijão branco e o resto de feijão preto. Sabe-se que a diferença entre as quantidades de sacos de um e outro tipo de feijão é 120. Os sacos de feijão branco eram, portanto, em número de:

a) 840. b) 480. c) 360. d) 240. e) 120.

2) (BB) Divida o número 2 772 em três partes, de tal forma que a primeira seja igual a $\frac{1}{3}$ da segunda e que a terceira seja o dobro da primeira e segunda partes reunidas.

3) (BB) Um número foi dividido em quatro partes, de tal modo que a primeira parte está para a segunda como 5 está para 7; a segunda parte está para a terceira como 2 para 5 e a terceira parte está para a quarta como 2,5 está para 3. Sabe-se que o quíntuplo da primeira parte, menos o dobro da segunda, mais o triplo da terceira, menos o triplo da quarta tem como resultado 4. Qual é o número e quais são as partes?

4) (BB) Uma herança de $ 101 500,00 deve ser dividida entre três pessoas, de modo que a parte da primeira corresponda aos $\frac{2}{5}$ da parte da segunda e aos $\frac{3}{4}$ da parte da terceira. Quanto ficará para cada uma das três pessoas?

5) (BB) A importância de $ 21,70 foi dividida entre três pessoas. Sabendo que a parte do primeiro está para a parte do segundo como 7 para 9, e que a do segundo está para a do terceiro como 3 para 5, determine as três partes.

6) (BB) Num colégio há 210 alunos. A metade do número de meninas é igual a $\frac{1}{5}$ do número de meninos. Quantos meninos há no colégio?

7) (BB) Duas pessoas devem dividir entre si a importância de $ 180,00. A primeira pretende receber $\frac{2}{3}$ da importância total e a segunda acha que tem direito a receber $ 72,00. Por fim, concordaram em dividir a importância total proporcionalmente às respectivas pretensões. Com quanto ficou cada uma?

8) (BB) Determine quantos funcionários tem um dos maiores bancos da América Latina, sabendo que, se a este número juntássemos a sua metade, a sua terça parte e a sua quinta parte, essa organização bancária teria 24 400 funcionários.

9) (BB) Determine quantos passageiros viajam em certo ônibus, sabendo que, se 2 passageiros ocupassem cada banco, 26 ficariam de pé e que, se 3 passageiros sentassem em cada banco, 2 bancos ficariam vazios.

10) (TTN) Em uma amostra retirada de um lote de feijão, constatou-se que $\frac{3}{7}$ eram de feijão branco e o resto de feijão preto. Sabe-se que a diferença entre as quantidades de sacos de um e outro tipo de feijão é 120. Os sacos de feijão branco eram, portanto, em número de:

a) 840. b) 480. c) 360. d) 240. e) 120.

11) (TTN) Que horas são, se $\frac{4}{11}$ do que resta do dia é igual ao tempo decorrido

a) 7h 40min
b) 7h
c) 4h
d) 5h
e) 6h 24min

12) (TTN) Num mapa, cuja escala é $\frac{1}{3\,000\,000}$, a estrada Belém–Brasília tem 67 cm

Calcule, em km, a distância real.

a) 2 100 b) 2 010 c) 2 280 d) 1 910 e) 2 233

13) (TTN) Uma pessoa caminha com passadas iguais de 80 cm e velocidade constante de 2 m/s. Quantos passos ela dará em 60 segundos?

a) 240 b) 180 c) 150 d) 120 e) 90

14) (TTN) Os $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{3}$ do preço de uma moto equivalem a $\frac{3}{2}$ de $\frac{2}{5}$ do preço de um automóvel avaliado em \$ 9 600,00. O preço da moto é de:

a) \$ 8 640,00.
b) \$ 6 400,00.
c) \$ 16 000,00.
d) \$ 5 184,00.
e) \$ 5 760,00.

15) (TTN) Pedro e José têm juntos \$ 450,00. O primeiro gastou $\frac{1}{6}$ do que possuía e o segundo ganhou de seu pai $\frac{1}{4}$ do que tinha. Sabendo que, após essas ocorrências, ambos passaram a ter a mesma importância, José ganhou de seu pai a quantia de:

a) \$ 56,00.
b) \$ 48,00.
c) \$ 45,00.
d) \$ 50,00.
e) \$ 54,00.

CAPÍTULO 2

GRANDEZAS PROPORCIONAIS E DIVISÃO PROPORCIONAL

1. Introdução

No dia-a-dia, você lida com situações que envolvem números, tais como: preço, peso, salário, dias de trabalho, índice de inflação, velocidade, tempo, idade, etc. A partir de agora, passaremos a nos referir a cada uma dessas situações mensuráveis como uma *grandeza*. Cada grandeza não é independente, mas vinculada a outra conveniente. O salário, por exemplo, está relacionado aos dias de trabalho. Vamos analisar dois tipos básicos de dependência entre grandezas proporcionais: a proporção direta e a proporção inversa.

2. Proporção direta

Grandezas como trabalho produzido e remuneração obtida são *diretamente proporcionais*. De fato, se você receber $ 2,00 por cada folha que datilografar, sabe que deverá receber $ 40,00 por 20 folhas datilografadas.

Veja outros exemplos de grandezas diretamente proporcionais:

1) Velocidade média e distância percorrida (ao dobrarmos a velocidade com que andamos, dobramos ao mesmo tempo a distância percorrida).
2) Área e preço de terrenos (se aumentarmos a área de um terreno, também aumentamos seu preço).
3) Altura de um objeto e comprimento da sombra projetada por ele (quanto maior é um objeto, maior é sua sombra).

> Duas grandezas são *diretamente proporcionais* quando, aumentando (ou diminuindo) uma delas numa determinada razão, a outra aumenta (ou diminui) nessa mesma razão.

3. Proporção inversa

Grandezas como tempo de trabalho e número de operários para a mesma tarefa são, em geral, *inversamente proporcionais*. Veja: para uma tarefa que 10 operários executam em 20 dias, devemos esperar que 5 operários a realizem em 40 dias.

Podemos destacar outros exemplos de grandezas inversamente proporcionais:

1) Velocidade média e tempo de viagem (se dobrarmos a velocidade com que andamos, mantendo fixa a distância a ser percorrida, reduziremos o tempo de percurso pela metade).
2) Número de torneiras de mesma vazão e tempo para encher um tanque (quanto mais torneiras estiverem abertas, menor será o tempo para encher o tanque).

> Duas grandezas são *inversamente proporcionais* quando, aumentando (ou diminuindo) uma delas numa determinada razão, a outra diminui (ou aumenta) na mesma razão.

Considere agora a situação de um grupo de pessoas que, em férias, se instale num acampamento que cobra $ 10,00 a diária individual.

Observe na tabela abaixo a relação entre o número de pessoas e a despesa diária:

Número de pessoas	1	2	4	5	10
Despesa diária ($)	10	20	40	50	100

De acordo com a tabela, percebemos que a razão de aumento do número de pessoas é a mesma para o aumento da despesa. Assim, se dobrarmos o número de pessoas, dobraremos ao mesmo tempo a despesa. Esta é, portanto, uma proporção direta. Isso significa que as grandezas *número de pessoas* e *despesa diária* são diretamente proporcionais.

Suponha ainda que, nesse mesmo exemplo, a quantia a ser gasta pelo grupo seja sempre de $ 200,00. Perceba, então, que o tempo de permanência do grupo dependerá do número de pessoas.

Analise a tabela seguinte:

Número de pessoas	1	2	4	5	10
Tempo de permanência (dias)	20	10	5	4	2

Note que, se dobrarmos o número de pessoas, o tempo de permanência se reduzirá à metade. Esta é, portanto, uma proporção inversa. Isso significa que as grandezas *número de pessoas* e *número de dias* são inversamente proporcionais.

Exercícios resolvidos

1) Um muro deverá ser construído por 20 operários que trabalharão durante um certo tempo. Analisar a natureza da proporção entre as grandezas *tamanho do muro* e *número de dias de trabalho*.

Solução

Grandeza 1	*Grandeza 2*
Tamanho do muro	Número de dias de trabalho

Uma maneira prática de visualizar a dependência entre as grandezas é a utilização de setas. Quando ambas estão no mesmo sentido, indicam proporção direta. Para escolher o sentido, basta fazer uma pergunta do tipo: se a grandeza 1 aumentar, a 2 também aumentará?

Observe neste exercício que, aumentando o tamanho do muro, serão necessários mais dias de trabalho, uma vez que o número de operários é fixo. Concluímos, então, que as grandezas analisadas são diretamente proporcionais.

↑ *Grandeza 1*	↑ *Grandeza 2*
Tamanho do muro	Número de dias de trabalho

Resposta: As grandezas analisadas são diretamente proporcionais.

2) Um muro de 100 m^2 será construído por operários que trabalharão durante um certo tempo. Analisar a natureza da proporção entre as grandezas *número de operários* e *número de dias de trabalho*.

Solução

Grandeza 1	*Grandeza 2*
Número de operários	Número de dias de trabalho

Aumentando o número de operários, o que acontecerá com o número de dias de trabalho? É claro que será necessário um número menor de dias de trabalho, uma vez que a área a ser construída é fixa. Dessa maneira, as setas deverão ser colocadas em sentidos opostos, o que indica uma proporção inversa.

Concluímos, então, que as grandezas analisadas são inversamente proporcionais.

↑ *Grandeza 1*	↓ *Grandeza 2*
Número de operários	Número de dias de trabalho

Resposta: As grandezas analisadas são inversamente proporcionais.

Exercícios propostos

1) Desenvolvendo uma velocidade constante, um automóvel parte de São Paulo com destino a Curitiba. Sabendo que a distância entre as duas cidades é de 400 km, analise a natureza da proporção entre as grandezas *velocidade* e *tempo de viagem*.

2) Lúcia comprou botões ao preço de $ 2,00 cada. Analise a natureza da proporção entre as grandezas *número de botões* e *preço a pagar pela compra*.

3) Mariana comprou 60 botões e deverá pregá-los em camisas com um número determinado de botões em cada uma. Analise a natureza das proporções entre as grandezas *número de botões por camisa* e *número de camisas*.

4) Uma lata de tinta dá exatamente para pintar um retângulo com 20 cm^2 de área. Analise a dependência entre as grandezas *comprimento* e *largura do retângulo*.

5) Para alimentar cavalos durante 13 dias é necessário um certo número de sacas de milho. Analise a natureza da proporção entre as grandezas *número de cavalos* e *número de sacas de milho*.

6) Cinqüenta coelhos são alimentados durante um certo período com ração especial. Analise a natureza da proporção entre as grandezas *número de dias* e *quantidade de ração*.

4. Divisão em partes proporcionais

Diretamente proporcional

Duas pessoas, **A** e **B**, trabalharam na fabricação de um mesmo objeto, sendo que **A** trabalhou durante 6 horas e **B** durante 5 horas. Como, agora, elas deverão dividir com justiça os $ 660,00 apurados com a venda do objeto? Na verdade, o que cada uma tem a receber deve ser diretamente proporcional ao tempo gasto durante a fabricação.

> Dividir um número em partes diretamente proporcionais a outros números dados é encontrar parcelas desse número que são diretamente proporcionais a esses números dados.

Neste problema, devemos dividir 660 em partes diretamente proporcionais a 6 e 5, que são as horas que **A** e **B** trabalharam.

Vamos formalizar a divisão, chamando de **x** o que **A** tem a receber e de **y** o que **B** tem a receber. Teremos, então:

$$\begin{cases} x + y = 660 \\ \frac{x}{6} = \frac{y}{5} \end{cases}$$

Usando as propriedades de proporção que já vimos no capítulo anterior, podemos resolver esse sistema da seguinte maneira:

$$\frac{x + y}{6 + 5} = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{660}{11} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 660}{11} = 360$$

Mas:

$$x + y = 660 \Rightarrow y = 660 - 360 \Rightarrow y = 300$$

Concluindo, **A** deve receber $ 360,00, enquanto **B** receberá $ 300,00.

Inversamente proporcional

Mas, e se nosso problema não fosse efetuar divisão em partes diretamente proporcionais, e sim inversamente proporcionais? Por exemplo: suponha que as duas pessoas, **A** e **B**, trabalharam durante um mesmo período para fabricar e vender por $ 160,00 um certo artigo. Se **A** chegou atrasado ao trabalho 3 dias e **B**, 5 dias, como efetuar com justiça a divisão? O problema agora é dividir $ 160,00 em partes inversamente proporcionais a 3 e a 5, pois deve ser levado em consideração que aquele que se atrasa mais deve receber menos.

> Dividir um número em partes inversamente proporcionais a outros números dados é encontrar parcelas desse número que sejam diretamente proporcionais aos inversos desses números dados.

No caso deste problema, temos que dividir 160 em partes inversamente proporcionais a 3 e a 5, que são os números de atraso de **A** e **B**. Para formalizar essa divisão, chamaremos de **x** o que **A** tem a receber e de **y** o que **B** tem a receber. Veja:

$$\begin{cases} x + y = 160 \\ \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\frac{x + y}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{x + y}{\frac{8}{15}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{160}{\frac{8}{15}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{160}{\frac{8}{15}} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 160 \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow x = 100$$

Mas:

$$x + y = 160 \Rightarrow y = 160 - 100 \Rightarrow y = 60$$

Concluindo, **A** deve receber $ 100,00 e **B** receberá $ 60,00.

Exercícios resolvidos

3) Dividir 720 em partes diretamente proporcionais a 4, 6 e 8.

Solução

Seja **x**: parte proporcional a 4

y: parte proporcional a 6

z: parte proporcional a 8

$$\begin{cases} x + y + z = 720 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\frac{x + y + z}{4 + 6 + 8} = \frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8}$$

Substituindo $x + y + z$ por 720:

$$\frac{720}{18} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \frac{720 \cdot 4}{18} = 160 \Rightarrow x = 160$$

$$\frac{720}{18} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = \frac{720 \cdot 6}{18} = 240 \Rightarrow y = 240$$

Sabendo que $x + y + z = 720$ e substituindo **x** e **y** por seus valores correspondentes, teremos:

$$160 + 240 + z = 720 \Rightarrow z = 320$$

Resposta: As partes diretamente proporcionais a 4, 6 e 8 serão, respectivamente, 160, 240 e 320.

4) Dividir o número 463 600 em partes inversamente proporcionais aos números $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{2}$.

Solução

Seja **x**: parte inversamente proporcional a $\frac{2}{3}$

y: parte inversamente proporcional a $\frac{4}{5}$

z: parte inversamente proporcional a $\frac{1}{2}$

Note que também é possível dizer:

x: parte diretamente proporcional a $\frac{3}{2}$ $\left(\text{que é o inverso de } \frac{2}{3}\right)$

y: parte diretamente proporcional a $\frac{5}{4}$ $\left(\text{que é o inverso de } \frac{4}{5}\right)$

z: parte diretamente proporcional a 2 $\left(\text{que é o inverso de } \frac{1}{2}\right)$

Sabemos que:

$$\begin{cases} x + y + z = 463\,600 \\ \frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{5}{4}} = \frac{z}{2} \end{cases}$$

Aplicando a propriedade da proporção:

$$\frac{x + y + z}{\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + 2} = \frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{5}{4}} = \frac{z}{2}$$

Substituindo x + y + z por seu valor, teremos:

$$\frac{463\,600}{\frac{19}{4}} = \frac{x}{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{463\,600 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{19}{4}} \Rightarrow x = 463\,600 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{19} = 146\,400$$

$$\frac{463\,600}{\frac{19}{4}} = \frac{y}{\frac{5}{4}} \Rightarrow y = \frac{463\,600 \cdot \frac{5}{4}}{\frac{19}{4}} \Rightarrow y = 463\,600 \cdot \frac{5}{\cancel{4}_{1}} \cdot \frac{\cancel{4}^{1}}{19} = 122\,000$$

Mas:

$x + y + z = 463\,600 \Rightarrow z + 146\,400 + 122\,000 = 463\,600 \Rightarrow z = 195\,200$

Resposta: As partes inversamente proporcionais a $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{2}$ serão, respectivamente, 146 400, 122 000 e 195 200.

Divisão proporcional composta

Vamos analisar a seguinte situação: uma empreiteira foi contratada para pavimentar uma rua. Ela dividiu o trabalho em duas turmas, prometendo pagá-las proporcionalmente. A tarefa foi realizada da seguinte maneira: na primeira turma, 10 homens trabalharam durante 5 dias; na segunda turma, 12 homens trabalharam durante 4 dias. Neste caso, estamos considerando que os homens tinham a mesma capacidade de trabalho. Sabendo que a empreiteira tinha $ 29 400,00 disponíveis, como dividir com justiça essa quantia entre as duas turmas de trabalho?

Como é possível perceber, essa divisão não é da mesma natureza das anteriores. Trata-se de uma divisão composta em partes proporcionais, pois os números obtidos deverão ser proporcionais a dois números de homens e também a dois números de dias trabalhados.

Na primeira turma, 10 homens trabalharam durante 5 dias, produzindo o mesmo resultado de 50 homens que tivessem trabalhado por um dia. Do mesmo modo, na segunda turma, 12 homens trabalharam 4 dias, o que seria equivalente a 48 homens trabalhando num único dia.

Para a empreiteira, o problema passaria a ser, portanto, de divisão diretamente proporcional a 50 (que é 10 · 5) e 48 (que é 12 · 4).

> Para dividir um número em partes, de tal forma que uma delas seja proporcional a **m** e **n** e a outra a **p** e **q**, basta dividir esse número em partes proporcionais a **m · n** e **p · q**.

Lembre-se de que efetuar uma divisão em partes inversamente proporcionais a certos números é o mesmo que fazer a divisão em partes diretamente proporcionais ao inverso desses números.

Resolvendo nosso problema, temos:

x: quantia que deve receber a primeira turma

y: quantia que deve receber a segunda turma

Assim:

$$\frac{x}{10 \cdot 5} = \frac{y}{12 \cdot 4} \text{ ou } \frac{x}{50} = \frac{y}{48} \Rightarrow \frac{x + y}{50 + 48} = \frac{x}{50} \Rightarrow \frac{29\,400}{98} = \frac{x}{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{29\,400 \cdot 50}{98} \Rightarrow x = 15\,000$$

Mas:

$$x + y = 29\,400 \Rightarrow y = 29\,400 - 15\,000 \Rightarrow y = 14\,400$$

Assim, a primeira turma deverá receber $ 15 000,00 da empreiteira e a segunda, $ 14 400,00.

Observação: Empresas de projetos costumam cobrar cada trabalho utilizando como unidade o *homem-hora*. O problema que acabamos de descrever é um exemplo no qual esse critério poderia ser utilizado, ou seja, a unidade nesse caso seria *homem-dia*. Desta forma, seria obtido o valor de $ 300,00, que é o resultado de 15 000 : 50 ou de 14 400 : 48.

Exercícios resolvidos

5) Dividir o número 4 680 em partes diretamente proporcionais a 3 e 6 e, em seguida, proporcionais a 5 e 4.

Solução

x é diretamente proporcional a 3

y é diretamente proporcional a 6

Podemos dizer, então, que:

$\frac{x}{3}$ é diretamente proporcional a 5

$\frac{y}{6}$ é diretamente proporcional a 4

$x + y = 4\,680$

Assim:

$$\frac{x}{\frac{3}{5}} = \frac{y}{\frac{6}{4}} \text{ ou } \frac{x}{3 \cdot 5} = \frac{y}{6 \cdot 4} \text{ ou } \frac{x}{15} = \frac{y}{24}$$

Então:

$$\frac{x + y}{15 + 24} = \frac{x}{15} \Rightarrow \frac{4\,680}{39} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{4\,680 \cdot 15}{39} = 1\,800$$

Mas:

$x + y = 4\,680 \Rightarrow y = 4\,680 - 1\,800 \Rightarrow y = 2\,880$

Resposta: O número 4 680 será dividido em 1 800 e 2 880.

6) Dividir o número 2 640 em partes diretamente proporcionais a $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$ e inversamente proporcionais a $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{3}$.

Solução

x é diretamente proporcional a $\frac{3}{4}$ e inversamente proporcional a $\frac{5}{6}$

y é diretamente proporcional a $\frac{1}{2}$ e inversamente proporcional a $\frac{2}{3}$

Assim, podemos dizer que **x** é diretamente proporcional a $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{5}$ e que **y** é diretamente proporcional a $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

Observe que tomamos $\frac{6}{5}$ e $\frac{3}{2}$, que são inversos de $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{3}$, respectivamente.

Como temos uma divisão composta em partes diretamente proporcionais, podemos dizer que:

x é diretamente proporcional a $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{20}$

y é diretamente proporcional a $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

Então, temos:

$$\frac{x}{\frac{18}{20}} = \frac{y}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{x + y}{\frac{18}{20} + \frac{3}{4}} = \frac{x}{\frac{18}{20}} \Rightarrow \frac{x + y}{\frac{18}{20} + \frac{15}{20}} = \frac{x}{\frac{18}{20}} \Rightarrow \frac{2\,640}{\frac{33}{20}} = \frac{x}{\frac{18}{20}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\,640 \cdot \frac{18}{20}}{\frac{33}{20}} = 2\,640 \cdot \frac{18}{\cancel{20}_{1}} \cdot \frac{\cancel{20}^{1}}{33} \Rightarrow x = 1\,440$$

Mas:

$x + y = 2\,640 \Rightarrow y = 2\,640 - 1\,440 \Rightarrow y = 1\,200$

Resposta: O número 2 640 será dividido em 1 440 e 1 200.

7) Certo milionário resolveu dividir parte de sua fortuna entre três sobrinhas, de modo que a divisão fosse diretamente proporcional às suas idades e inversamente proporcional a seus pesos. As moças tinham 16, 18 e 21 anos e pesavam, respectivamente, 52, 48 e 50 quilos. A quantia a ser dividida entre elas era de $ 5 734 000,00. Quanto cada uma recebeu?

Solução

Vamos chamar de:

x a quantia que a moça de 16 anos recebeu;

y a quantia que a moça de 18 anos recebeu;

z a quantia que a moça de 21 anos recebeu.

Assim, podemos dizer que:

x é diretamente proporcional a 16 e inversamente proporcional a 52;
y é diretamente proporcional a 18 e inversamente proporcional a 48;
z é diretamente proporcional a 21 e inversamente proporcional a 50.

Podemos dizer ainda que:

x é diretamente proporcional a $16 \cdot \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$

y é diretamente proporcional a $18 \cdot \frac{1}{48} = \frac{18}{48}$

z é diretamente proporcional a $21 \cdot \frac{1}{50} = \frac{21}{50}$

Observe que $\frac{1}{52}, \frac{1}{48}, \frac{1}{50}$ são os inversos de 52, 48 e 50.

Então:

$$\frac{x}{\frac{16}{52}} = \frac{y}{\frac{18}{48}} = \frac{z}{\frac{21}{50}} \text{ e } x + y + z = 5\,734\,000$$

$$\frac{x + y + z}{\frac{16}{52} + \frac{18}{48} + \frac{21}{50}} = \frac{x}{\frac{16}{52}} \Rightarrow \frac{5\,734\,000}{\frac{4\,800}{15\,600} + \frac{5\,850}{15\,600} + \frac{6\,552}{15\,600}} = \frac{x}{\frac{16}{52}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\,734\,000}{\frac{17\,202}{15\,600}} = \frac{x}{\frac{16}{52}} \Rightarrow x = \frac{5\,734\,000 \cdot \frac{16}{52}}{\frac{17\,202}{15\,600}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5\,734\,000 \cdot \frac{16}{52} \cdot \frac{15\,600}{17\,202} = \frac{1\,431\,206\,400\,000}{894\,504} \Rightarrow x = 1\,600\,000$$

Do mesmo modo:

$$\frac{x + y + z}{\frac{16}{52} + \frac{18}{48} + \frac{21}{50}} = \frac{y}{\frac{18}{48}} \Rightarrow \frac{5\,734\,000}{\frac{17\,202}{15\,600}} = \frac{y}{\frac{18}{48}} \Rightarrow y = \frac{5\,734\,000 \cdot \frac{18}{48}}{\frac{17\,202}{15\,600}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 5\,734\,000 \cdot \frac{18}{48} \cdot \frac{15\,600}{17\,202} \Rightarrow y = 1\,950\,000$$

Mas:

$x + y + z = 5\,734\,000 \Rightarrow z = 5\,734\,000 - 1\,600\,000 - 1\,950\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 2\,184\,000$

Resposta: A moça que tem 16 anos deverá receber $ 1 600 000,00, a que tem 18 receberá $ 1 950 000,00 e a de 21 anos, $ 2 184 000,00.

Exercícios propostos

7) Divida os números abaixo em partes diretamente proporcionais aos valores dados:

a) 295 a $\frac{1}{5}$; 1 e $\frac{1}{9}$ 45 225 25

b) 104 a 2; $\frac{3}{2}$ e 10

c) 5 400 a 10; 20 e 30

d) 840 a $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{12}$

e) 120 a $\frac{6}{10}$; $1\frac{1}{2}$ e 0,9

8) Divida os números abaixo em partes inversamente proporcionais aos valores dados:

a) 650 a 20; 30 e 40

b) 2 781 600 a $\frac{2}{3}$; 0,8 e $\frac{1}{2}$

c) 117 844 a 2; 0,75; $\frac{7}{4}$ e $\frac{13}{10}$

9) A Federação Paulista de Futebol resolveu distribuir prêmios num total de $ 6 320 000,00 para os quatro times que tiveram o melhor ataque durante o campeonato, ou seja, para aqueles que fizeram o maior número de gols na razão direta desses gols. Os times premiados fizeram 45, 40, 38 e 35 gols. Como é fácil adivinhar a classificação, responda apenas quanto recebeu cada time.

10) No ano seguinte, a Federação Paulista de Futebol estipulou uma verba de $ 16 224 000,00 para premiar os quatro times que tiveram a defesa menos vazada, isto é, para aqueles que sofreram menos gols na razão inversa desse número de gols. Os times premiados sofreram 14, 15, 17 e 18 gols. Quanto recebeu cada um?

11) Um número foi dividido em partes diretamente proporcionais a 4, 3 e 5. Sabendo que a parte correspondente a 4 era 2 000, encontre esse número.

12) Divida o lucro de $ 1 250,00 de uma transação comercial entre três pessoas, de modo que a segunda receba $\frac{2}{5}$ da primeira e a terceira receba $\frac{3}{2}$ da segunda.

13) Divida o número 236 em partes diretamente proporcionais a 0,9; 0,5 e 0,8 e inversamente proporcionais a 0,75; 0,875 e 0,5.

14) Divida o número 2 132 em partes inversamente proporcionais a $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{4}$ e inversamente proporcionais a $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{4}{9}$.

15) Uma fábrica pretende premiar quatro operários, de modo que o prêmio seja diretamente proporcional ao número de peças perfeitas produzidas por cada um num único dia e inversamente proporcional a cada peça defeituosa que cada um produziu no mesmo dia. Os operários premiados produziram 250, 300, 180 e 320 peças perfeitas cada um e, respectivamente, 1, 2, 3 e 2 peças defeituosas. A quantia estipulada como prêmio foi de $ 6 200,00. Quanto recebeu cada operário?

Problemas e testes de concursos

1) (BB) O lucro de determinada empresa foi dividido entre seus três sócios, na proporção de 3, 5 e 9. Sabendo que o segundo sócio recebeu $ 40 000,00 a mais do que o primeiro, responda qual foi o lucro total e quanto coube a cada sócio.

2) (BB) A quantia de $ 20 650,00 foi dividida entre duas pessoas. A primeira recebeu na razão direta de 8 e na razão inversa de 3; a segunda recebeu na razão direta de 9 e na razão inversa de 4. Quanto recebeu cada pessoa?

3) (BB) A importância de $ 684 000,00 foi dividida entre duas pessoas. Sabendo que a primeira recebeu na razão direta de 7 e de 3 e a segunda na razão direta de 9 e de 4, calcule a parte de cada uma.

4) (BB) Certo número foi dividido na razão direta dos números 2 e 4. Mas, caso fosse dividido na razão direta dos números 8 e 10, a segunda parte ficaria diminuída de 840 unidades. Calcule esse número.

5) (BB) Divida o número 684 em três partes, de tal modo que a primeira esteja para a segunda como 3 está para 5 e que a segunda esteja para a terceira como 4 está para 8.

6) (BB) Duas famílias, **A** e **B**, combinaram passar as férias numa casa de campo, dividindo todas as despesas de acordo com o número de pessoas de cada uma. Terminadas as férias, verificou-se que a família **A** teria gasto $ 8 424,00 e a família **B** $ 9 342,00, razão por que tiveram de fazer um acerto de contas. Sabendo que a família **A** era de cinco pessoas e a **B** de quatro pessoas, que quantia a família **A** teve de dar à família **B**?

7) (TTN) Um comerciante deseja premiar, no primeiro dia útil de cada mês, os três primeiros fregueses que chegarem ao seu estabelecimento. Para tanto, dividiu $ 507 000,00 em partes inversamente proporcionais a $2\frac{1}{4}$; $1\frac{2}{3}$ e 1,2. Nessas condições, o prêmio de menor valor a ser pago será de:

a) $ 110 000,00.
c) $ 225 000,00.
e) $ 120 000,00.
b) $ 118 905,54.
d) $ 222 947,88.

8) (TTN) Dividindo o número 570 em três partes, de tal forma que a primeira esteja para a segunda como 4 está para 5 e a segunda esteja para a terceira como 6 está para 12, teremos para a terceira parte o valor de:

a) 120. b) 150. c) 320. d) 300. e) 250.

9) (TTN) João resolveu fazer um bolão para jogar na loteria. Inicialmente convidou Pedro e, depois, Antônio. João contribuiu com $ 12,00 e seus amigos com $ 6,00 e $ 18,00, respectivamente. A repartição do prêmio foi diretamente proporcional às importâncias desembolsadas e inversamente proporcional aos números 2, 3 e 6, respectivamente. Sabendo que Antônio ganhou $ 12 000,00 a mais que Pedro, responda qual o valor total do prêmio.

a) $ 129 000,00
c) $ 135 000,00
e) $ 120 000,00
b) $ 132 000,00
d) $ 126 000,00

10) (TTN) Um prêmio de $ 152 000,00 será distribuído aos cinco participantes de um jogo de futebol de salão, de modo inversamente proporcional às faltas cometidas por cada jogador. Quanto caberá a cada um, se as faltas foram 1, 2, 2, 3 e 5?

a) $ 60 000,00; $ 30 000,00; $ 30 000,00; $ 22 000,00; $ 10 000,00
b) $ 60 000,00; $ 30 000,00; $ 30 000,00; $ 20 000,00; $ 12 000,00
c) $ 58 100,00; $ 35 800,00; $ 23 200,00; $ 23 200,00; $ 11 700,00
d) $ 42 000,00; $ 40 000,00; $ 40 000,00; $ 20 000,00; $ 10 000,00
e) $ 40 000,00; $ 38 000,00; $ 38 000,00; $ 24 000,00; $ 12 000,00

11) (TTN) Uma pessoa deseja repartir 135 balas entre duas crianças, em partes que sejam diretamente proporcionais a $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{7}$ e, ao mesmo tempo, inversamente proporcionais a $\frac{4}{9}$ e $\frac{2}{21}$. Quantas balas cada criança irá receber?

a) 27 e 108
c) 40 e 95
e) 30 e 105
b) 35 e 100
d) 25 e 110

CAPÍTULO 3

REGRA DE SOCIEDADE

1. Introdução

Os problemas que discutiremos neste capítulo são aplicações dos casos de divisão em partes proporcionais, que já vimos anteriormente.

Entendemos por *sociedade* um grupo de duas ou mais pessoas que se juntam, cada uma com um determinado capital, que deverá ser aplicado por um certo tempo numa atividade qualquer e com o objetivo de conseguir lucros.

Suponha, por exemplo, que três amigos ganhem $ 9 000,00 na loteria, como resultado da premiação de um jogo, cujo valor de aposta era de $ 4,50.

Considere que os sócios tenham contribuído com as seguintes quantias:

Sócios	Capital ($)
A	1,00
B	1,50
C	2,00

Quanto cada sócio deverá receber?

Naturalmente, este é um caso de divisão em partes diretamente proporcionais às quantias investidas. Assim, temos:

$$\begin{cases} \frac{A}{1,00} = \frac{B}{1,50} = \frac{C}{2,00} \\ A + B + C = 9\,000,00 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\frac{A + B + C}{1{,}00 + 1{,}50 + 2{,}00} = \frac{A}{1{,}00} = \frac{B}{1{,}50} = \frac{C}{2{,}00} \Rightarrow \frac{9\,000{,}00}{4{,}50} = \frac{A}{1{,}00} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{9\,000{,}00 \cdot 1{,}00}{4{,}50} \Rightarrow A = 2\,000{,}00$$

Usando o mesmo processo, encontraremos: B = 3 000,00 e C = 4 000,00.

Portanto, **A** receberá $ 2 000,00; **B** receberá $ 3 000,00 e **C** receberá $ 4 000,00.

Nos casos de sociedades mais complexas, é importante também o período de tempo durante o qual cada sócio deixa seu dinheiro investido.

O que define uma sociedade como *simples* ou *composta* é o fato de os capitais aplicados e de os períodos de tempo da aplicação serem iguais ou diferentes para cada sócio.

2. Regra de sociedade simples

Primeiro caso: Os capitais são diferentes, mas aplicados durante períodos de tempo iguais. Neste caso, podemos afirmar que:

> Os lucros ou prejuízos serão divididos em partes diretamente proporcionais aos capitais investidos.

Exemplo:

Gigi e Helena montaram uma casa de chocolates caseiros.

Veja abaixo o capital investido:

Sócios	**Capital investido** ($)
Gigi	2 500,00
Helena	2 000,00

Ao final de um ano, o balanço apurou um lucro de $ 13 500,00. Quanto cada uma deverá receber?

Chamando de **x** e **y** o que Gigi e Helena devem, respectivamente, receber, teremos:

$$\frac{x}{2\,500} = \frac{y}{2\,000} \text{ e } x + y = 13\,500$$

Aplicando as propriedades das proporções, temos:

$$\frac{x}{2\,500} = \frac{y}{2\,000} = \frac{x + y}{2\,500 + 2\,000} = \frac{13\,500}{4\,500} = 3$$

$$\frac{x}{2\,500} = 3 \Rightarrow x = 7\,500$$

$$\frac{y}{2\,000} = 3 \Rightarrow y = 6\,000$$

Portanto, Gigi receberá $ 7 500,00 e Helena $ 6 000,00.

Segundo caso: Os capitais são iguais, mas aplicados durante períodos de tempo diferentes. Neste caso, podemos afirmar que:

> Os lucros ou prejuízos serão divididos em partes diretamente proporcionais aos períodos de tempo em que os capitais ficaram investidos.

Exemplo:

Três amigos, **A**, **B** e **C**, juntaram-se numa sociedade com idêntica participação no capital inicial. **A** deixou seu capital no negócio durante 4 meses, **B** por 6 meses e **C** durante 3 meses e meio. Sabendo que, ao final de um ano, houve um lucro de $ 162 000,00, como dividir essa quantia entre os três?

Neste problema há a necessidade de, inicialmente, transformarmos os períodos de tempo em uma mesma unidade: meses ou dias. Utilizando a unidade dias, vamos considerar o mês comercial com 30 dias.

$$\begin{cases} \frac{A}{120} = \frac{B}{180} = \frac{C}{105} \\ A + B + C = 162\,000 \end{cases}$$

Aplicando as propriedades, temos:

$$\frac{A}{120} = \frac{B}{180} = \frac{C}{105} = \frac{A + B + C}{120 + 180 + 105} = \frac{162\,000}{405} = 400$$

$$\frac{A}{120} = 400 \Rightarrow A = 48\,000$$

$$\frac{B}{180} = 400 \Rightarrow B = 72\,000$$

$$\frac{C}{105} = 400 \Rightarrow C = 42\,000$$

Dessa maneira, os lucros auferidos por **A**, **B** e **C** serão, respectivamente, $ 48 000,00, $ 72 000,00 e $ 42 000,00.

3. Regra de sociedade composta

Nas sociedades compostas, tanto os capitais quanto os períodos de investimento são diferentes para cada sócio. Trata-se, portanto, de dividir os lucros ou os prejuízos em partes diretamente proporcionais, tanto ao capital quanto ao período de investimento.

> Quando os capitais e os períodos de tempo forem diferentes, os lucros ou os prejuízos serão divididos em partes diretamente proporcionais ao *produto* dos capitais pelos períodos de tempo respectivos.

Exemplo:

Uma sociedade teve um lucro de $ 117 000,00. O primeiro sócio entrou com $ 1 500,00 durante 5 meses, e o outro, com $ 2 000,00 durante 6 meses. Qual foi o lucro de cada um?

Trata-se de um caso de regra de sociedade composta. Chamando de **x** o que o primeiro sócio deve receber e de **y** o que o segundo receberá, temos:

$$\frac{x}{1\,500 \cdot 5} = \frac{y}{2\,000 \cdot 6} \text{ e } x + y = 117\,000$$

Aplicando as propriedades:

$$\frac{x}{7\,500} = \frac{y}{12\,000} = \frac{x + y}{19\,500} = \frac{117\,000}{19\,500} = 6$$

$$\frac{x}{7\,500} = 6 \Rightarrow x = 45\,000$$

$$\frac{y}{12\,000} = 6 \Rightarrow y = 72\,000$$

Portanto, o primeiro sócio receberá $ 45 000,00 e o segundo $ 72 000,00.

Exercícios resolvidos

1) Três sócios sofreram um prejuízo de $ 14 400,00. Os três entraram para a sociedade com o mesmo capital, ficando o primeiro durante 11 meses, o segundo 12 e o terceiro 13 meses. Qual foi o prejuízo de cada um?

Solução

Chamando de **x**, **y** e **z** os prejuízos do primeiro, do segundo e do terceiro sócio, respectivamente, teremos:

$$\begin{cases} \frac{x}{11} = \frac{y}{12} = \frac{z}{13} \\ x + y + z = 14\,400 \end{cases}$$

Aplicando as propriedades das proporções, temos:

$$\frac{x}{11} = \frac{y}{12} = \frac{z}{13} = \frac{x + y + z}{11 + 12 + 13} = \frac{14\,400}{36} = 400$$

$$\frac{x}{11} = 400 \Rightarrow x = 4\,400$$

$$\frac{y}{12} = 400 \Rightarrow y = 4\,800$$

$$\frac{z}{13} = 400 \Rightarrow z = 5\,200$$

Resposta: O prejuízo dos três sócios foi, respectivamente, de $ 4 400,00, $ 4 800,00 e $ 5 200,00.

2) Três pedreiros, ganhando o mesmo salário-hora, trabalharam o número de horas apresentadas no quadro abaixo:

Trabalhador	Número de horas trabalhadas
1º pedreiro	24
2º pedreiro	18
3º pedreiro	20

Na hora do pagamento, o dono da obra tinha em mãos um envelope com $ 3 100,00. Como foi feita a divisão do dinheiro?

3) Uma sociedade entre três amigos, durante um período comum de tempo, produziu um lucro de $ 20 000,00. O primeiro dos sócios entrou com um capital que era o dobro do capital do segundo sócio; este, por sua vez, contribuiu com uma quantia triplicada em relação ao terceiro sócio. Que parte do lucro cada sócio deverá receber?

4) Uma sociedade em que três amigos participaram com capitais iguais rendeu $ 510 000,00. O tempo de participação de cada um é dado pela tabela abaixo:

Sócios	Tempo
1º amigo	8 meses
2º amigo	1 ano
3º amigo	1 ano e 2 meses

Calcule a divisão do lucro entre os sócios.

5) Uma sociedade entre dois amigos, **A** e **B**, foi estabelecida com as seguintes características:

	Capital ($)	Tempo de aplicação
sócio A	2 500,00	1 ano e 6 meses
sócio B	3 000,00	1 ano e 9 meses

Divida o lucro de $ 18 000,00 entre os sócios.

6) Dois amigos juntaram-se numa sociedade durante dois anos, com capitais que estavam entre si na razão de $\frac{2}{5}$. Divida entre os sócios o lucro de $ 49 000,00.

7) Uma área de 255 000 m^2 foi comprada por três famílias. Qual a metragem que caberá a cada uma, se a primeira entrou com $ 20 000,00, a segunda com $ 30 000,00 e a terceira com $ 35 000,00?

8) Três sócios lucraram $ 50 000,00. Calcule o lucro de cada sócio, sabendo que o lucro do primeiro está para o do segundo, assim como 3 está para 2, e que o do segundo está para o do terceiro, assim como 5 está para 3.

9) Uma sociedade entre três amigos, com um capital total de $ 36 000,00, rendeu $ 12 000,00. Calcule o capital inicial de cada sócio, sabendo que ao primeiro coube a quantia de $ 4 000,00 de lucro, ao segundo $ 6 000,00 e ao terceiro $ 2 000,00.

10) Uma empresa obteve um lucro de $ 132 200,00. O primeiro sócio empregou $ 12 000,00 durante 1 ano e 3 meses; o segundo, $ 8 000,00 por 1 ano e meio; e o terceiro, $ 10 000,00 durante 1 ano. Qual foi o lucro de cada sócio?

Problemas e testes de concursos

1) (BB) Ao constituírem uma sociedade, dois sócios entraram com os capitais de $ 56 500,00 e $ 42 500,00, respectivamente. Na divisão do lucro, o primeiro recebeu $ 518,00 a mais que o segundo. Quanto recebeu cada sócio?

2) (BB) Em certa sociedade comercial, o sócio **A** entrou com $\frac{2}{5}$ do capital durante $\frac{3}{4}$ do tempo, e o sócio **B** entrou com o resto do capital durante $\frac{2}{3}$ do tempo. Sabendo que houve um prejuízo de $ 49 210,00, calcule que parte desse prejuízo tocará a cada um dos sócios.

3) (BB) Na constituição de uma sociedade, o sócio **A** entrou com $ 51 000,00; o **B**, com $ 85 000,00; o **C**, com $ 153 000,00; e o **D**, com $ 221 000,00. Ao ser distribuído o lucro final, proporcionalmente às cotas do capital aplicado de cada sócio, **D** recebeu $ 88 400,00. Calcule o lucro total e as parcelas que couberam a **A**, **B** e **C**.

4) (BB) Em certa sociedade, os capitais de **A** e **B** estão entre si como 3 está para 5. Sabendo que esses capitais estiveram aplicados durante 15 e 18 meses, respectivamente, e que a sociedade teve o prejuízo de $ 311 100,00, calcule a parte de cada sócio nesse prejuízo.

5) (BB) **A** e **B** fundaram uma sociedade. Três meses depois, admitiram **C**, um outro sócio. Sete meses depois da entrada do terceiro sócio, aceitaram também o sócio **D**. Sabendo que todos eles entraram com capitais iguais, calcule a parte de **C** e **D** no lucro de $ 227 835,00, verificado dois anos após a fundação da sociedade.

6) (BB) Dois sócios devem dividir entre si um lucro de $ 64 350,00. Sabendo que o primeiro entrou com $ 269 000,00 e que o lucro do segundo foi de $ 24 000,00, calcule o lucro do primeiro e o capital inicial aplicado pelo segundo.

7) (BB) Após realizado um determinado negócio, três sócios devem distribuir entre si o lucro que nele apuraram no valor de $ 23 000,00. Sabendo que o primeiro sócio contribuiu para o negócio com $ 21 000,00, o segundo com $ 11 000,00 e que, do lucro obtido, o terceiro sócio recebeu a importância de $ 15 000,00, qual foi o lucro de cada um dos dois primeiros sócios e qual a contribuição do terceiro?

8) (BB) **A**, **B** e **C** organizaram uma empresa comercial com o capital de $ 2 000 000,00. **C** retirou-se ao fim de 1 ano e 2 meses, **B** ao fim de 1 ano e 8 meses e **A** ao cabo de 2 anos. O lucro apurado foi distribuído da seguinte maneira: $ 11 900,00 para **C**, $ 13 000,00 para **B** e $ 12 000,00 para **A**. Qual o capital com que cada sócio entrou na sociedade?

9) (BB) Três pessoas associaram-se com o capital de $ 12 000,00. A primeira entrou com $\frac{1}{3}$ do que a segunda forneceu e a terceira contribuiu com $ 6 000,00. Sabendo que a sociedade obteve um lucro de $ 5 000,00, responda quanto tocou de lucro a cada um dos sócios.

10) (BB) Distribua o lucro de $ 28 200,00 entre os dois sócios de uma empresa, sabendo que o primeiro aplicou $ 80 000,00 na sociedade durante 9 meses e que o segundo aplicou $ 20 000,00 durante 11 meses.

11) (BB) Certa sociedade constituída por três sócios, com o capital de $ 180 000,00, obteve $ 25 200,00 de lucro. Sabendo que o sócio **A** entrou com $\frac{1}{3}$ do capital, que o sócio **B** entrou com $\frac{2}{5}$ e que o sócio **C** entrou com o restante, determine o lucro de cada sócio.

12) (BB) Na fundação de certa sociedade, **A** e **B** entraram com $ 520 000,00 e $ 780 000,00, respectivamente. Quando a sociedade completou seu quinto mês de existência, o sócio **A** retirou $ 120 000,00 do seu capital. Dois meses depois dessa data, **B** elevou seu capital para $ 900 000,00. Ao fim do segundo

ano de atividade, verificou-se um lucro de $ 506 999,00, do qual foi retirada a importância de $ 20 000,00 para gratificações. Que parte desse lucro tocou a cada um dos sócios?

13) (TTN) Dois amigos constituem uma sociedade, participando o primeiro com $ 10 000,00 e o segundo com $ 8 000,00. Após 10 meses de existência da empresa, o primeiro sócio aumentou seu capital em mais $ 5 000,00. Decorridos 2 meses dessa data, o segundo sócio retirou $ 2 000,00 de sua cota inicial. Sabendo que ao final de 2 anos foi apurado um lucro de $ 23 900,00, ao segundo sócio coube a participação de:

a) $ 8 700,00.
c) $ 8 400,00.
e) $ 8 800,00.
b) $ 9 200,00.
d) $ 8 900,00.

14) (TTN) Três amigos **A**, **B** e **C** constituem uma sociedade que, após um ano, apura um lucro de $ 48 000,00, cabendo ao sócio **B** $ 16 000,00 e a **C** o valor correspondente a $\frac{1}{3}$ de **A**. Sabendo que o capital de **C** é $ 24 000,00 menor do que o de **B**, o capital da empresa é de:

a) $ 117 000,00.
c) $ 136 000,00.
e) $ 126 000,00.
b) $ 144 000,00.
d) $ 128 000,00.

15) (TTN) Certa sociedade constituída por três sócios, com o capital de $ 180 000,00, obteve $ 25 200,00 de lucro. Sabendo que o sócio **A** entrou com $\frac{1}{3}$ do capital, que o sócio **B** entrou com $\frac{2}{5}$ e que o sócio **C** entrou com o restante, indique o lucro de cada sócio, respectivamente:

a) $ 7 200,00; $ 9 500,00 e $ 8 500,00.
b) $ 8 200,00; $ 8 500,00 e $ 8 500,00.
c) $ 9 000,00; $ 10 200,00 e $ 6 000,00.
d) $ 8 400,00; $ 10 080,00 e $ 6 720,00.
e) $ 9 200,00; $ 10 000,00 e $ 6 000,00.

16) (TTN) Distribua o lucro de $ 28 200,00 entre dois sócios de uma empresa, sabendo que o primeiro aplicou $ 80 000,00 na sociedade durante 9 meses e que o segundo aplicou $ 20 000,00 durante 11 meses.

a) $ 18 000,00 e $ 10 200,00.
b) $ 21 000,00 e $ 7 200,00.
c) $ 20 000,00 e $ 8 200,00.
d) $ 18 200,00 e $ 10 000,00.
e) $ 21 600,00 e $ 6 600,00.

CAPÍTULO 4

REGRA DE TRÊS

1. Introdução

Nos capítulos anteriores, ao analisarmos grandezas proporcionais, procuramos apenas reconhecer a natureza da dependência entre elas. Neste capítulo, vamos ampliar nossa análise, incluindo os valores numéricos envolvidos nessa dependência e determinando os que são desconhecidos.

Um problema típico, por exemplo, é determinar a distância que um automóvel percorrerá em 8 horas, sabendo que, se a mesma velocidade for mantida durante 6 horas, o carro percorrerá 900 km.

Para a resolução deste problema, duas questões são colocadas: a primeira é quanto à natureza da proporção entre as grandezas envolvidas; a segunda refere-se à montagem da proporção.

Ao conjunto de respostas dessas duas questões e à determinação do valor desconhecido dá-se o nome de *regra de três*.

2. Regra de três simples

Retomando o problema do automóvel, vamos resolvê-lo com o uso da regra de três, de maneira bastante prática e simples.

Devemos dispor as grandezas, bem como os valores envolvidos, de modo que possamos reconhecer a natureza da proporção e escrevê-la. Assim:

Grandeza 1: tempo (horas)	**Grandeza 2: distância percorrida** (km)
6 ↓ 8	900 ↓ x

Observe que colocamos na mesma linha valores que se correspondem: 6 horas e 900 km; 8 horas e o valor desconhecido.

Assim como fizemos anteriormente, vamos usar setas para indicar a natureza da proporção. Se elas estiverem no mesmo sentido, as grandezas são diretamente proporcionais. Caso estejam em sentidos contrários, são inversamente proporcionais.

Neste problema, para estabelecer se as setas têm o mesmo sentido, é necessário responder à pergunta: "Considerando a mesma velocidade, se aumentarmos o tempo, aumentará a distância percorrida?" Como a resposta a essa questão é afirmativa, descobrimos que as grandezas são diretamente proporcionais.

Já que a proporção é direta, podemos escrever:

$$\frac{6}{8} = \frac{900}{x}$$

Então:

$$6 \cdot x = 8 \cdot 900 \Rightarrow x = \frac{7\,200}{6} = 1\,200$$

Concluindo, o automóvel percorrerá 1 200 km em 8 horas.

Vamos analisar outra situação em que usamos a regra de três.

Um automóvel, com velocidade média de 90 km/h, percorre um certo espaço durante 8 horas. Qual seria o tempo necessário para percorrer o mesmo espaço com uma velocidade média de 60 km/h?

Grandeza 1: tempo (horas)	**Grandeza 2: velocidade** (km/h)
8 ↓ x	90 ↓ 60

A resposta à pergunta "Mantendo o mesmo espaço percorrido, se aumentarmos a velocidade, o tempo aumentará?" é negativa. Vemos, então, que as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais.

Como a proporção é inversa, será necessário invertermos a ordem dos termos de uma das colunas, tornando a proporção direta. Assim:

8 ↑ x	60 ↑ 90

Escrevendo a proporção, temos:

$$\frac{8}{x} = \frac{60}{90} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 90}{60} = 12$$

Concluindo, o automóvel percorrerá a mesma distância em 12 horas.

Regra de três simples é um processo prático utilizado para resolver problemas que envolvam pares de grandezas direta ou inversamente proporcionais. Essas grandezas formam uma proporção em que se conhecem três termos e o quarto termo é procurado.

Exercícios resolvidos

1) Numa fábrica, 16 homens com igual capacidade de trabalho realizam uma tarefa durante 45 dias. Com 10 homens apenas, em quantos dias será realizada a mesma tarefa?

Solução

Usando a regra de três, temos:

Grandeza 1: número de homens	Grandeza 2: dias de trabalho
↓ 16 ↓ 10	↑ 45 ↑ x

As setas estão em sentido contrário porque, se aumentarmos o número de homens, diminuirá o tempo necessário para efetuar a mesma tarefa.

Então, temos uma proporção inversa, o que torna necessária uma inversão de termos em qualquer uma das colunas. Veja:

$$\downarrow 16 \qquad \downarrow x$$
$$\downarrow 10 \qquad \downarrow 45$$

Escrevendo a proporção:

$$\frac{16}{10} = \frac{x}{45} \Rightarrow x = \frac{45 \cdot 16}{10} = 72$$

Resposta: A mesma tarefa será executada em 72 dias.

2) Numa classe, os alunos estavam dispostos em 8 fileiras compostas de 9 elementos cada uma. No entanto, como eles estavam fazendo muito barulho, o professor resolveu mudar a disposição da classe. Para isso, propôs que cada fileira fosse composta de 12 alunos. Após essa modificação, quantas fileiras foram preenchidas?

Solução

Grandeza 1: alunos por fileira	Grandeza 2: número de fileiras
9 ↓ 12	8 ↑ x

Já que o total de alunos é fixo, a proporção entre as grandezas é inversa; pois, se aumentarmos o número de alunos por fileira, diminuirá o número de fileiras.

Sendo assim, já considerando a inversão das colunas, podemos escrever a proporção:

$$\frac{9}{12} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 8}{12} = 6$$

Resposta: Foram preenchidas 6 fileiras.

3) Comprei 15 kg de feijão por $ 360,00. Quantos quilos poderia comprar, se tivesse $ 1 200,00?

Solução

Grandeza 1: quantidade de feijão (kg)	Grandeza 2: preço ($)
15 ↓ x	360 ↓ 1 200

A proporção entre as grandezas é direta porque, se aumentarmos a quantidade de feijão que vamos comprar, aumentaremos o gasto. Assim, a proporção necessária será de:

$$\frac{15}{x} = \frac{360}{1\,200} \Rightarrow x = \frac{1\,200 \cdot 15}{360} = 50$$

Resposta: Poderia comprar 50 kg de feijão.

3. Regra de três composta

Vamos agora utilizar a regra de três para resolver problemas em que estão envolvidas mais de duas grandezas proporcionais. Como exemplo, vamos analisar o seguinte problema:

Numa fábrica, 10 máquinas trabalhando 20 dias produzem 2 000 peças. Quantas máquinas serão necessárias para produzir 1 680 peças em 6 dias?

Como nos problemas anteriores, você deve verificar a natureza da proporção entre as grandezas e escrever essa proporção. Vamos utilizar o mesmo modo para dispor as grandezas e os valores envolvidos.

Grandeza 1: número de máquinas	**Grandeza 2: dias**	**Grandeza 3: número de peças**
10 ↓ x	20 ↑ 6	2 000 ↓ 1 680

Para estabelecer o sentido das setas, é necessário fixar uma das grandezas e relacioná-la com as outras.

Supondo fixo o número de dias, responda à questão: "Aumentando o número de máquinas, aumentará o número de peças fabricadas?" A resposta a essa questão é afirmativa. Logo, as grandezas 1 e 3 são *diretamente proporcionais*.

Agora, supondo fixo o número de peças, responda à questão: "Aumentando o número de máquinas, aumentará o número de dias necessários para o trabalho?" Neste caso, a resposta é negativa. Logo, as grandezas 1 e 2 são *inversamente proporcionais*.

Para escrever corretamente a proporção, devemos fazer com que todas as setas estejam no mesmo sentido, invertendo os termos das colunas convenientes. Naturalmente, neste exemplo, fica mais fácil inverter a coluna da grandeza 2.

10 ↓ x 6 ↓ 20 2 000 ↓ 1 680

É bom lembrar que uma grandeza proporcional a duas outras é também proporcional ao produto delas. Assim, vamos escrever a proporção:

$$\frac{10}{x} = \frac{6}{20} \cdot \frac{2\,000}{1\,680} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{12\,000}{33\,600} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 33\,600}{12\,000} = 28$$

Concluindo, serão necessárias 28 máquinas.

Regra de três composta é um processo prático utilizado para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas proporcionais.

Exercícios resolvidos

4) Num certo loteamento, um terreno de 10 m de frente por 15 m de fundo custa $ 20 000,00. Quanto custará, no mesmo loteamento, um terreno de 15 m de frente por 12 m de fundo?

Solução

Frente (m)	**Fundos** (m)	**Preço** ($)
10 ↑ 15 ↑	15 ↑ 12 ↑	20 000 ↑ x ↑

Comparando as grandezas *frente* e *fundo* com a grandeza *preço*, que mantém a incógnita **x**, percebemos que:

a) Mantendo fixo o fundo e aumentando a frente do terreno, o preço deve aumentar. Essas grandezas são, portanto, diretamente proporcionais. Logo, devemos colocar as setas no mesmo sentido.

b) Mantendo fixa a frente e aumentando os fundos do terreno, o preço deve aumentar. Essas grandezas são, portanto, diretamente proporcionais. Logo, as setas devem ser colocadas no mesmo sentido.

Assim, a proporção deve ser:

$$\frac{20\,000}{x} = \frac{10}{15} \cdot \frac{15}{12} \Rightarrow x = \frac{20\,000 \cdot 15 \cdot 12}{10 \cdot 15} \Rightarrow x = 24\,000$$

Resposta: O terreno deverá custar $ 24 000,00.

5) Se 100 kg de arroz alimentam 36 pessoas durante 15 dias, quantos quilos do mesmo arroz serão necessários para alimentar o dobro de pessoas durante 45 dias?

Solução

Quantidade de arroz (kg)	**Número de pessoas**	**Número de dias**
100 ↑ x	36 ↑ 72	15 ↑ 45

Comparando as grandezas *número de pessoas* e *número de dias* com a grandeza *quilograma*, que mantém a incógnita **x**, percebemos que:

a) Mantendo fixo o número de dias e aumentando o número de pessoas, a quantidade de comida deve aumentar. Essas grandezas são, portanto, diretamente proporcionais. Logo, as setas devem estar no mesmo sentido.

b) Mantendo fixo o número de pessoas e aumentando o número de dias, a quantidade de comida deve aumentar. Essas grandezas são, portanto, diretamente proporcionais. Conseqüentemente, as setas devem ser colocadas no mesmo sentido.

Assim, a proporção deve ser:

$$\frac{100}{x} = \frac{36}{72} \cdot \frac{15}{45} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 72 \cdot 45}{36 \cdot 15} \Rightarrow x = 600$$

Resposta: Serão necessários 600 kg de arroz.

6) Uma torneira enche um tanque em 20 horas, com uma vazão de 1 L por minuto. Quanto tempo será necessário para que duas torneiras, com vazão de 2 L por minuto, encham o mesmo tanque?

Solução

Torneiras	Horas	Vazão (litros por minuto)
1 ↓ 2 ↓	20 ↑ x ↑	1 ↓ 2 ↓

Comparando as grandezas *número de torneiras* e *vazão* com a grandeza *número de horas*, que mantém a incógnita **x**, percebemos que:

a) Mantendo fixo o número de torneiras e aumentando a vazão, o tempo para encher o tanque deverá ser menor. Deste modo, diminuirá o número de horas. Essas grandezas são, portanto, inversamente proporcionais. Logo, as setas devem ser colocadas em sentidos contrários.

b) Mantendo fixa a vazão e aumentando o número de torneiras, o tempo para encher o tanque deverá ser menor. Deste modo, diminuirá o número de horas. Essas grandezas são, portanto, inversamente proporcionais. Logo, as setas devem ser colocadas em sentidos contrários.

Assim, já considerando a inversão das colunas, a proporção deve ser:

$$\frac{20}{x} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = 5$$

Resposta: Serão necessárias 5 horas para encher o tanque.

7) Trabalhando 6 horas por dia durante 10 dias, 10 engenheiros executam projetos de 5 pontes. Quantos engenheiros seriam necessários para projetar 8 pontes, trabalhando 8 horas por dia, durante 15 dias?

Solução

Número de engenheiros	Número de horas/dia	Número de dias	Número de projetos
10 ↑ x ↑	6 ↓ 8 ↓	10 ↓ 15 ↓	5 ↑ 8 ↑

Comparando as grandezas *número de horas por dia*, *número de dias* e *número de projetos* com a grandeza *número de engenheiros*, que mantém a incógnita **x**, percebemos que:

a) Aumentando o número de horas de trabalho por dia e mantendo o número de dias e o número de projetos fixos, o número de engenheiros pode baixar. Essas grandezas são, portanto, inversamente proporcionais e as setas devem ser colocadas em sentidos contrários.

b) Mantendo fixas as horas de trabalho por dia e os projetos e aumentando o número de dias trabalhados, pode-se diminuir o número de engenheiros. Portanto, essas grandezas são inversamente proporcionais e as setas devem ser colocadas em sentidos contrários.

c) Mantendo fixas as horas de trabalho por dia e o número de dias trabalhados e aumentando o número de projetos, o número de engenheiros também aumentará. Essas grandezas são, portanto, diretamente proporcionais e as setas devem ser colocadas no mesmo sentido.

Já considerando a inversão das colunas, a proporção deve ser:

$$\frac{10}{x} = \frac{8}{6} \cdot \frac{15}{10} \cdot \frac{5}{8} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 8}{8 \cdot 15 \cdot 5} \Rightarrow x = 8$$

Resposta: Para realizar o serviço nas condições desejadas, serão necessários 8 engenheiros.

Exercícios propostos

1) Um corte de tecido de 2 m x 2,5 m custa $ 100,00. Quanto deverá custar um corte do mesmo tecido de 3 m x 5 m?

2) Se 33 coelhos comem 126 quilos de cenoura por dia, quantos quilos comerão 77 coelhos?

3) Uma obra pode ser feita por 63 operários em 20 dias. Quantos dias demorarão 84 operários para fazer a mesma obra?

4) Em 9 minutos uma torneira despeja em um tanque 18 L de água. Quantos litros de água despejará nesse mesmo tanque, se funcionar durante 2 horas e 15 minutos?

5) Em 15 dias de trabalho, um operário ganha $ 600,00. Quanto deverá receber por 40 dias de trabalho?

6) Um médico ganha, para cada 16 consultas, $ 1 200,00. Quanto deverá ganhar se consultar 144 pacientes?

7) Para construir um muro foram necessários 15 operários trabalhando durante 20 dias. Quantos dias levariam 12 operários para construir outro muro igual?

8) Com a velocidade de 80 km/h, vou de São Paulo ao Rio em aproximadamente 6 horas. Quanto tempo levaria, para a mesma viagem, se andasse a 100 km/h?

9) Se $\frac{4}{9}$ de uma obra foram feitos em 28 dias, em quantos dias a obra toda será concluída?

10) Um gato corre 100 m à frente de um cão que o persegue. Enquanto o gato percorre 9 m, o cão percorre 10 m. Quanto deve percorrer o cão para que a distância que o separa do gato seja reduzida para 50 m?

11) Um granjeiro tem ração para alimentar 32 galinhas durante 22 dias. Após 4 dias, resolve comprar mais 4 galinhas. Quanto tempo durarão as provisões se a ração de cada galinha não for diminuída?

12) Um navio tem suprimentos para 20 dias de viagem. Porém, um imprevisto deixou-o ancorado em alto-mar durante 10 dias. Em quanto é preciso reduzir a alimentação diária da tripulação para que não falte comida até o final da viagem?

13) Um automóvel consome 8 L de gasolina quando funciona durante 40 minutos seguidos. Se funcionasse durante 3 horas e 20 minutos, quantos litros de gasolina seriam consumidos?

14) Uma pessoa calculou que o dinheiro de que dispunha seria suficiente para passar 20 dias na Europa. Ao chegar, resolveu prolongar sua viagem por mais 4 dias. A quanto teve de reduzir a média de seu gasto diário?

15) Uma prova de Matemática, com um índice de dificuldade avaliado pelo professor em 20, teve a média 8,0 em uma classe. Qual seria a média da mesma classe se o índice de dificuldade fosse elevado para 25?

16) Em 30 dias, 24 operários asfaltaram uma avenida de 960 m de comprimento por 9 m de largura. Quantos operários seriam necessários para fazer um asfaltamento, em 20 dias, de 600 m de comprimento por 10 m de largura?

17) Um gramado de 720 m^2 foi podado por dois homens que trabalharam 6 horas por dia durante 2 dias. Quantos metros quadrados três homens conseguiriam podar se trabalhassem 8 horas por dia durante 3 dias?

18) Trabalhando 8 horas por dia, os 2 500 operários de uma indústria automobilística produzem 500 veículos em 30 dias. Quantos dias serão necessários para que 1 200 operários produzam 450 veículos trabalhando 10 horas por dia?

19) Para que uma obra fosse concluída em 25 dias de trabalho, numa jornada diária de 8 horas, foram empregados 10 operários. Mas, depois de 10 dias de trabalho, verificou-se que apenas $\frac{2}{5}$ da obra estavam prontos. Daí por diante, quantas horas deverão trabalhar por dia os mesmos operários para que a obra fique pronta no tempo prometido?

20) Trabalhando durante 4 dias, 8 teares produzem 320 m^2 de pano. Quantos metros quadrados de pano serão produzidos por 10 teares trabalhando durante 3 dias?

21) Um homem come duas bananas em 3 minutos. Quantos homens comeriam 60 bananas em meia hora?

22) Com o trabalho de 12 homens, durante 8 dias, uma fábrica lucrou $ 10 000,00. A fim de conseguir um lucro de $ 25 000,00 em 10 dias, quantos homens a fábrica deveria ter?

23) Durante 5 dias e andando 6 horas por dia, um ônibus percorreu 1 600 km. Quantos quilômetros percorreria se, com o dobro da velocidade, andasse 8 horas por dia durante 6 dias?

24) Um livro de 120 páginas, com 25 linhas por página, é impresso em 4 horas, sendo utilizados 40 m^2 de papel. Com a mesma quantidade de papel, quantas horas seriam necessárias para imprimir um livro de 100 páginas com 30 linhas por página?

4. Câmbio

A operação de troca entre moedas de dois países é denominada *câmbio*. Se a cotação do dólar americano estiver, por exemplo, a $ 1,20, já saberemos de antemão que na compra de 1 dólar gastaremos $ 1,20, na compra de 2 dólares gastaremos $ 2,40, na compra de 3, $ 3,60 e assim por diante.

Como podemos perceber por esse exemplo, as operações de câmbio têm exatamente a estrutura de uma proporção simples e direta.

1 dólar		$ 1,20
tantos dólares		x

ou

1 dólar		$ 1,20
x		tantos $

Como exemplo, vamos considerar o caso de uma pessoa que tem 1 000 dólares e quer transformá-los em marcos alemães. Recorrendo ao câmbio oficial, verificará que o dólar está a R$ 1,023 (preço de compra) e o marco alemão a R$ 0,706732 (preço de venda). O trabalho, então, será o de resolver duas regras de três:

Dólar	**Real**
1	1,023
1 000	x

$$x = 1{,}023 \cdot 1\,000 \Rightarrow x = 1\,023$$ (reais apurados na venda dos dólares)

Real	**Marco**
0,706732	1
1 023	x

$$x = \frac{1\,023}{0{,}706732} \cong 1\,477{,}51$$

Concluindo, com 1 000 dólares a pessoa conseguirá, aproximadamente, 1 477,51 marcos alemães.

Há ainda outros problemas ligados ao câmbio e que se referem a comissões por remessas de dinheiro, efetuadas de um país a outro, e também à desvalorização ou valorização de uma moeda numa determinada época. Por isso, quando tratarmos das porcentagens, retomaremos este assunto.

A seguir apresentamos como exemplo uma tabela de cotações de dezembro de 1996, tendo valores de moedas de vários países expressos em reais.

Observe que, nessa tabela, aparecem duas colunas: *compra* e *venda*. A coluna *compra* dá o preço que o agente cambial pagará na compra da moeda; a coluna *venda* dá o preço que o agente exigirá para vender a alguém essa mesma moeda.

Câmbio turismo		
Moedas	**Compra** (R$)	**Venda** (R$)
Dólar americano*	n/d	n/d
Dólar americano	1,023	1,062
Dólar americano/cheque viagem	1,030	1,060
Marco alemão	0,636695	0,706732
Iene japonês	0,008675	0,009629
Franco suíço	0,740188	0,821609
Libra esterlina	1,655153	1,837220
Franco francês	0,188542	0,209282

Fonte: BB; (*) Cotação da Anecc – Associação Nacional das Empresas Credenciadas em Câmbio.

As cotações que utilizaremos nos problemas a seguir foram retiradas desta tabela.

Exercícios resolvidos

8) Uma pessoa que viajará para os Estados Unidos dispõe de R$ 2 500,00 para a viagem. Quantos dólares conseguirá comprar?

Solução

Dólar	**Real**
1	1,062
x	2 500

$$\frac{1}{x} = \frac{1{,}062}{2\,500} \Rightarrow x = \frac{2\,500}{1{,}062} \cong 2\,354{,}05$$

Resposta: Conseguirá comprar 2 354 dólares, aproximadamente.

9) Preciso remeter dinheiro para a Inglaterra, num total de 350 libras. Para tanto, quanto terei que despender em reais?

Solução

Libra	**Real**
1	1,837220
350	x

$$x = 350 \cdot 1{,}837220 \Rightarrow x \cong 643{,}03$$

Resposta: Terei que despender R$ 643,03, aproximadamente.

10) Com R$ 4 000,00 consegui comprar 1 250 moedas de um país. Qual é o câmbio da moeda do país **x** em relação ao real?

Solução

Real	**Moeda**
4 000	1 250
x	1

$$x = \frac{4\,000}{1\,250} \Rightarrow x = 3{,}20$$

Resposta: O câmbio da moeda do país em questão é de R$ 3,20.

11) Uma pessoa pretende se desfazer de 35 000 francos suíços e, para isso, recorre ao câmbio oficial. Quanto conseguirá apurar em reais?

Solução

Francos suíços	**Real**
1	0,740188 (Observe que este é o preço de compra)
35 000	x

$x = 35\,000 \cdot 0{,}740188 \Rightarrow x = 25\,906{,}58$

Resposta: A pessoa receberá R$ 25 906,58.

Câmbio indireto

O câmbio ao qual nos referimos até agora denomina-se *câmbio direto*, uma vez que as moedas são trocadas diretamente, sem praças intermediárias. No entanto, há casos em que uma ou mais moedas de países diferentes são utilizadas como intermediárias na transação. É o caso de quem quer trocar real por dólar, mas primeiro troca real por libra esterlina, e, depois, libra esterlina por dólar. A esse tipo de câmbio dá-se o nome de *indireto*.

Exercícios propostos

Para resolver os exercícios a seguir, consulte a tabela de cotações apresentada na página 53.

25) Calcule o valor de 300 libras esterlinas:
   a) para compra;
   b) para venda.

26) Calcule o valor de 150 dólares americanos:
   a) para compra;
   b) para venda.

27) Quanto custará, em moeda brasileira, 2 000 francos suíços?

28) Com R$ 1 240,00 quantos francos franceses, no máximo, você conseguirá comprar?

29) Converta R$ 650,40 em moeda alemã.

30) Para fazer uma compra na França, conto com 870 ienes japoneses. Para tanto, devo transformar este dinheiro em francos. Quantos francos obterei, no máximo, com esta troca?

31) Indique a melhor operação a ser feita: transformar 180 000 ienes japoneses em dólares, à taxa de 114,93 ienes por dólar, ou fazer a transformação indireta, passando pela moeda brasileira?

32) Sabendo que com 1 dólar americano eu posso comprar 1,554 marcos ou 5,25 francos, responda quantos marcos poderei comprar com 1 000 francos?

Problemas e testes de concursos

1) (BB) Para colocar assoalhos em uma casa foram necessárias 18 dúzias de tábuas de 2,30 m de comprimento por 10 cm de largura. Quantas tábuas seriam necessárias para assoalhar a mesma casa se elas tivessem 1,80 m de comprimento por 3 dm de largura?

2) (BB) Enquanto uma torneira pode encher um tanque em 9 horas, outra torneira pode encher o mesmo tanque em 12 horas. Se essas duas torneiras funcionassem juntas e, com elas, mais uma terceira torneira, o tanque ficaria cheio em 4 horas. Em quantas horas a terceira torneira, funcionando sozinha, encheria o tanque?

3) (BB) As rodas traseiras de um carro têm 3,25 m de circunferência. Enquanto as rodas dianteiras dão 20 voltas, as traseiras dão somente 12. Qual é a circunferência das rodas dianteiras?

4) (BB) Um viajante vai da cidade **x** à cidade **z** em um trem que faz 60 km/h e volta em outro cuja velocidade é de 96 km/h. Sabendo que a viagem de ida e volta durou 9 horas e 58 minutos, responda qual a distância entre as duas cidades.

5) (BB) Certa máquina, trabalhando 12 horas por dia, consome 9 780 kg de carvão em 30 dias. Qual o custo do carvão gasto por essa máquina durante 90 dias, sabendo que nesse período trabalhou 12 horas e 30 minutos por dia e que cada tonelada de carvão custou $ 800,00?

6) (BB) Se um homem caminha à razão de 4 km e 500 m por hora, em quantas horas, minutos e segundos, percorrerá a distância de 14 km e 415 m?

7) (BB) Sabendo que $\frac{3}{4}$ de certa obra foram feitos por 33 pessoas em 1 ano de trabalho, determine quantas pessoas seriam necessárias para fazer a obra toda em metade desse tempo.

8) (BB) Sabendo que 3 operários, trabalhando 7 horas por dia, durante 2 dias, fizeram 126 m de certa obra, calcule quantos metros da mesma obra farão 2 operários que trabalhem 3 horas por dia durante 5 dias.

9) (BB) Trabalhando 4 horas diárias, durante 18 dias, 64 operários abriram uma vala de 36 m de comprimento num terreno de dureza 3. Determine o comprimento de outra vala, aberta por 56 operários que trabalharam 5 horas por dia, durante 16 dias, num terreno de dureza 2.

10) (BB) Uma torneira que jorra 1 035,5 L de água por hora enche certo reservatório em 12 horas. Determine em quanto tempo outra torneira, que jorra 20 L por minuto, encheria o mesmo reservatório.

11) (BB) Trabalhando 8 horas diárias durante 15 dias, 27 operários fizeram um muro de 20 m de comprimento, 1,80 m de altura e 30 cm de espessura. Quantos operários seriam necessários para a construção de outro muro de 30 m de comprimento, 2 m de altura e 27 cm de espessura se eles trabalhassem 9 horas por dia durante 18 dias?

12) (BB) Vinte e cinco tecelões, trabalhando 7 horas por dia durante 18 dias, teceram 750 m de certo tecido. Quantos tecelões, trabalhando 9 horas por dia durante 14 dias, seriam necessários para tecer 630 m do mesmo tecido?

13) (BB) O volante de uma máquina, dando 318 voltas em 6 minutos, põe em movimento uma fieira que produz 265 m de tecido em 60 minutos. Que tempo será preciso para fabricar 564 m de tecido se o volante der 376 voltas em 4 minutos?

14) (BB) Em determinado dia, o câmbio brasileiro sobre Londres está $ 73,4 a libra, achando-se o dólar cotado a $ 19,10. Sabendo que em Nova York, nessa mesma data, a libra se acha cotada a $ 4,03, responda se haveria, ou não, uma vantagem maior em comprar libras diretamente ou fazendo-se arbitragem por intermédio da praça de Nova York.

15) (BB) A empresa **x** tem que comprar 8 000 libras sobre Londres. Sabendo que no Rio de Janeiro a libra custa $ 79,60 e que o dólar está cotado a $ 19,50, responda se é mais vantajoso para a empresa comprar as libras no Rio de Janeiro ou em Nova York, onde a libra está cotada a 4,03 dólares.

16) (BB) Dadas as cotações abaixo, calcule quanto gastou um comerciante no Rio de Janeiro para saldar uma dívida de 315 libras em Londres, tendo feito a remessa de dinheiro por intermédio das praças de Nova York e Roma.

Rio de Janeiro/Nova York ..... $ 18,70

Nova York/Roma ..... 37,50 liras por um dólar

Roma/Londres ..... 150,00 liras por uma libra esterlina

17) (BB) Estando o câmbio sobre Lisboa a $ 1,80, quantos escudos podem ser adquiridos com $ 360,00?

18) (TTN) Um tanque é alimentado por duas torneiras; a primeira pode enchê-lo em 5 horas e a segunda em 4 horas. Em que tempo é possível encher esse tanque se abrirmos a segunda torneira uma hora após a primeira?

a) 3h 15min 10s
b) 2h 46min 40s
c) 2h 10min 10s
d) 3h 10min
e) 3h 15min

19) (TTN) Uma caixa-d'água, com capacidade para 960 m^3, possui uma tubulação que a alimenta até o limite em 7 horas e um "ladrão" que a esvazia em 12 horas. Com a água enchendo a caixa e o "ladrão" funcionando simultaneamente, em quanto tempo a caixa-d'água ficará cheia?

a) 16h 8min
b) 14h 8min
c) 16h 28min
d) 16h 48min
e) 14h 48min

20) (TTN) Na planta de um apartamento, as dimensões da sala são 9 cm de largura e 12 cm de comprimento. Após a construção do imóvel, a sala ficou com uma largura de 7,5 m. A medida do comprimento dessa sala é de:

a) 10,0 m. b) 11,0 m. c) 5,6 m. d) 9,0 m. e) 8,6 m.

21) (TTN) Um grupo de 10 trabalhadores pode fazer uma estrada em 96 dias, trabalhando 6 horas por dia. Se o mesmo grupo trabalhar 8 horas por dia, a estrada será concluída em:

a) 90 dias. b) 84 dias. c) 72 dias. d) 128 dias. e) 60 dias.

22) (TTN) Um criador sabe que 900 frangos consomem 8,1 toneladas de ração em 30 dias. Ele adquiriu 1 000 frangos e 10,5 toneladas de ração. Considerando que ele pretenda abater essas aves daqui a 40 dias, quando elas estiverem no peso ideal, qual a quantidade excedente de ração que deverá ser comprada?

a) 1 900 kg
b) 1 500 kg
c) 1 800 kg
d) 1 700 kg
e) 1 600 kg

23) (TTN) Trabalhando 7 horas por dia, 24 operários fazem um determinado serviço em 10 dias. Em quantos dias a obra estará terminada, se 4 operários forem dispensados e o regime de trabalho diminuído de uma hora por dia?

a) 8 dias b) 11 dias c) 12 dias d) 21 dias e) 18 dias

24) (TTN) Trabalhando 8 horas por dia, 12 pedreiros constroem 27 m^2 de um muro em 30 dias. Quantas horas deverão trabalhar 16 operários por dia, durante 24 dias, para construir 36 m^2 do mesmo muro?

a) 7 b) 8 c) 10 d) 12 e) 17

25) (TTN) Um navio, com guarnição de 300 homens, necessita de 120 000 L de água para efetuar uma viagem de 20 dias. Aumentando a guarnição em 50 homens e a água em 6 000 L, determine qual poderá ser a duração da viagem.

a) 24 dias b) 22 dias c) 20 dias d) 18 dias e) 16 dias

26) (TTN) Uma empresa comprometeu-se a realizar uma obra em 30 dias, contando com 12 operários que trabalhavam 6 horas por dia. Decorridos 10 dias, quando $\frac{1}{3}$ da obra já havia sido concluído, a empresa teve que deslocar 4 operários para outro projeto. Nessas condições, para terminar a obra no prazo determinado, a empresa deverá prorrogar o turno por mais:

a) 2h. b) 3h. c) 1h. d) 1h 30min. e) 2h 30min.

CAPÍTULO 5

PORCENTAGEM

1. Introdução

Ao abrir o jornal, ligar a televisão ou olhar as vitrines nas ruas, freqüentemente nos deparamos com expressões do tipo:

"O índice de reajuste salarial de março é de 1,61%."

"O rendimento da caderneta de poupança em fevereiro foi de 1,85%."

"A inflação acumulada nos últimos 12 meses foi de 12,85%."

"Os preços foram reduzidos em até 0,5%."

Ainda que tais expressões não sejam completamente desconhecidas, é muito importante elaborar um estudo organizado do assunto *porcentagem*, uma vez que seu conhecimento é uma ferramenta indispensável para a maioria dos problemas relativos à Matemática Comercial.

2. Porcentagem

O estudo da porcentagem é ainda um modo de comparar números, usando a proporção direta. Entretanto, uma das razões dessa proporção deverá ser sempre uma fração de denominador 100. Vamos deixar isso mais claro: numa situação em que você tenha que calcular 40% de $ 300,00, será preciso determinar um valor que represente, em 300, o mesmo que 40 em 100. Isso pode ser resumido na proporção:

$$\frac{40}{100} = \frac{x}{300}$$

Então, o valor de **x** será de $ 120,00.

Sabendo que em cálculos de porcentagem será sempre necessário utilizar proporções diretas, perceba também que qualquer problema dessa natureza poderá ser resolvido com regra de três simples.

Exercícios resolvidos

1) O salário de um trabalhador era de $ 2 000,00, em fevereiro. Tendo sofrido um reajuste de 5,2% em março, quanto passou a ser o seu novo salário?

Solução

Esse problema pode ser resolvido de dois modos.

Primeiro modo

Inicialmente, calculamos 5,2% de 2 000:

$$\frac{5,2}{100} = \frac{x}{2\,000} \Rightarrow x = \frac{5,2 \cdot 2\,000}{100} \Rightarrow x = 104$$

Em seguida, somamos o resultado da porcentagem calculada ao salário de março:

$ 104,00 + $ 2 000,00 = $ 2 104,00

Segundo modo

Sabemos que o novo salário é de 100% do antigo mais 5,2% de reajuste.

Ou seja:

salário novo = 105,2% de 2 000

Portanto:

$$\frac{105,2}{100} = \frac{x}{2\,000} \Rightarrow x = \frac{2\,000 \cdot 105,2}{100} = 2\,104$$

Resposta: O novo salário passou a ser de $ 2 104,00.

2) Walter pediu aumento salarial na empresa em que trabalhava, alegando que um simples reajuste (que naquele dissídio seria de 7,5%) não cobriria suas reais necessidades. Na ocasião, seu salário era de $ 2 850,00 e sua proposta foi uma correção de 9,0%. No final do mês, ele recebeu $ 3 092,25. Calculando qual o índice de correção aplicado pela empresa, responda se o pedido foi aceito.

Solução

Resumidamente, a questão é saber de quanto por cento foi a correção do salário de Walter. Mais uma vez, podemos resolver esse problema de dois modos diferentes.

Primeiro modo

De acordo com seu reajuste salarial, temos que:

$$\underbrace{\$\ 3\,092{,}25}_{\text{salário novo}} - \underbrace{\$\ 2\,850{,}00}_{\text{salário antigo}} = \underbrace{\$\ 242{,}25}_{\text{aumento}}$$

Veja a regra de três:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,850{,}00 \\ \downarrow \\ 242{,}25 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 100\% \\ \downarrow \\ x \end{array}\right\} \quad x = \frac{242{,}25 \cdot 100}{2\,850} = 8{,}5\%$$

Segundo modo

Sabendo que o salário novo é resultado da soma entre o salário velho e o aumento, devemos calcular em quanto por cento o salário novo é superior ao velho.

Assim, veja a proporção:

$$\frac{x}{100} = \frac{3\,092{,}25}{2\,850{,}00} \Rightarrow x = 108{,}5\%$$

salário novo = 108,5% do salário velho

108,5% = 100% + 8,5%

Resposta: O aumento porcentual foi de 8,5%. Portanto, o pedido de Walter não foi atendido.

3) Em 1965, o dólar sofreu uma valorização de 20%, passando a custar $ 2,22. Um turista havia comprado 1 000 dólares para sair do país antes dessa valorização. Quanto ele gastou?

Solução

Desta vez, temos que obter o preço do dólar antes da valorização.

Sabendo que 2,22 correspondia a 120% do preço anterior, podemos escrever a proporção:

$$\frac{120}{100} = \frac{2{,}22}{x} \Rightarrow x = \frac{2{,}22 \cdot 100}{120} = 1{,}85$$

Dessa forma, temos que o dólar custava $ 1,85, antes da valorização. Para saber quanto o turista gastou, basta multiplicar esse valor por 1 000.

Resposta: O turista gastou $ 1 850,00.

3. Taxa porcentual

O uso da regra de três simples no cálculo de porcentagens é um recurso que torna fácil o entendimento do assunto, mas não é o único caminho possível e nem sequer o mais prático.

Para simplificar os cálculos numéricos, é necessário inicialmente nomear alguns termos. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo:

Calcular 20% de 800.

Calcular 20%, ou $\frac{20}{100}$ de 800, é o mesmo que dividir 800 em 100 partes e tomar 20 dessas partes. Como a centésima parte de 800 é 8, vinte dessas partes serão 160.

Chamamos:

20% de *taxa porcentual*;

800 de *principal*;

160 de *porcentagem*.

Temos, portanto:

- *Principal*: número sobre o qual será calculada a porcentagem.
- *Taxa*: valor fixo, tomado a partir de cada 100 partes do principal.
- *Porcentagem*: número que se obtém somando cada uma das 100 partes do principal até alcançar a taxa.

A partir dessas definições, deve ficar claro que, ao calcularmos uma porcentagem de um principal conhecido, não é necessário utilizar a montagem de uma regra de três. Basta dividir o principal por 100 e tomar tantas dessas partes quanto for a taxa. Vejamos outro exemplo.

Exemplo:

Calcular 32% de 4 000.

Primeiro dividimos 4 000 por 100 e obtemos 40, que é a centésima parte de 4 000. Em seguida, somando 32 partes iguais a 40, obtemos 32 · 40 ou 1 280, que é a resposta para o problema.

Observe que dividir o principal por 100 e multiplicar o resultado dessa divisão por 32 é o mesmo que multiplicar o principal por $\frac{32}{100}$ ou 0,32. De agora em diante, vamos usar este raciocínio.

$$\text{porcentagem} = \text{taxa} \times \text{principal}$$

Exercícios resolvidos

4) Quanto é 13% de 200?

Solução

$$\text{Taxa} = 13\% = \frac{13}{100} = 0{,}13$$

Principal = 200
Porcentagem = taxa · principal
Porcentagem = 0,13 · 200 = 26

Resposta: 13% de 200 é 26.

5) Calcular 250% de 32.

Solução

$$\text{Taxa} = 250\% = \frac{250}{100} = 2{,}5$$

Principal = 32
Porcentagem = taxa · principal
Porcentagem = 2,5 · 32 = 80

Resposta: 250% de 32 é 80.

6) Obter 3,5% de $ 4 500,00.

Solução

$$\text{Taxa} = 3{,}5\% = \frac{3{,}5}{100} = 0{,}035$$

Principal = 4 500
Porcentagem = taxa · principal
Porcentagem = 0,035 · 4 500 = 157,5

Resposta: 3,5% de $ 4 500,00 é $ 157,50.

7) Qual é o principal que à taxa de 20% resulta numa porcentagem de 36?

Solução

$$\text{Taxa} = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

Porcentagem = 36
Porcentagem = taxa · principal
36 = 0,2 · principal

$$\text{Principal} = \frac{36}{0{,}2} = 180$$

Resposta: O principal é 180.

8) Qual é a taxa que, aplicada num capital de $ 720 000,00, resulta numa porcentagem de $ 21 600,00?

Solução

Principal = 720 000
Porcentagem = 21 600
Porcentagem = taxa · principal
21 600 = taxa · 720 000

$$\text{Taxa} = \frac{21\,600}{720\,000} = 0{,}03 = \frac{3}{100} = 3\%$$

Resposta: A taxa é de 3%.

Exercícios propostos

1) Calcule:

a) 3% de 420.
b) 7,25% de 1 200.
c) 0,4% de 200.
d) 125% de 36.
e) 6% de 18.
f) 9,1% de 4.
g) $\frac{3}{2}$% de 40.
h) $\frac{2}{3}$% de 40.

2) Qual é o número principal em que 20 representa 3%?

3) Uma taxa de 13% é aplicada num determinado capital, produzindo um valor porcentual de $ 52 000,00. De quanto era esse capital?

4) Calcule a taxa que deve incidir em 3 600 para resultar 72 de porcentagem.

5) Calcule o número principal em que:

a) 10 representa 8%.
b) 120 representa 200%.
c) 14 representa 3,5%.
d) 30 representa 0,4%.
e) 800 representa $\frac{3}{5}$%.
f) 3 representa 2,7%.

6) Calcule a porcentagem em que:

a) 10 representa em 50.
b) 2 representa em 40.
c) 30 representa em 120.
d) 5 representa em 80.
e) 2,43 representa em 81.
f) 0,42 representa em 42.

7) A média de reprovação em concursos públicos é de 82%. Quantas pessoas serão aprovadas num concurso público com 6 500 inscritos?

8) Um caminhão de areia perde 1,5% de seu conteúdo em toda viagem que realiza. Carregando no início da viagem 8 m^3 de areia, quanto será perdido?

9) Numa cidade, 45% da população é composta por homens. Qual a população total dessa cidade se nela residem 60.500 mulheres?

10) Poderei obter um abatimento de 15% para o pagamento à vista na compra de uma geladeira que custa $ 900,00. Quanto pagarei pela geladeira nessas condições?

11) Um vendedor ganha 3% de comissão sobre as vendas que realiza. Tendo recebido $ 300,00 de comissões, qual o total vendido por ele?

12) Se eu comprar um objeto por $ 20,00 e vendê-lo por $ 25,00, qual será a minha porcentagem de lucro?

13) Do que eu recebo, 30% vão para a poupança, 20% para o aluguel e 35% para a alimentação, restando-me apenas $ 450,00. Qual é o meu salário?

14) Sabendo que um artigo de $ 5 000,00 foi vendido com um abatimento de $ 160,00, encontre a taxa porcentual utilizada na operação.

15) Que taxa devemos utilizar para transformar uma quantia **x** em 3x?

16) Uma certa quantia **y** tornou-se 2y após 1 ano e 3y após 2 anos. Com relação à quantia inicial, calcule a taxa aplicada no primeiro e no segundo ano.

17) Um comerciante comprou um automóvel de $ 84 000,00 com desconto de 2%. Em seguida, vendeu o automóvel por um valor 3% acima desse preço. Qual foi a taxa de lucro total, desde a venda até a compra, usada pelo comerciante?

18) Sabendo que certa mistura foi feita com 12 L de água e 8 L de álcool, determine a porcentagem de álcool contida na mistura.

19) Comprei uma casa cujo preço estava estipulado em $ 200.000,00. Tendo gasto 5% desse valor em impostos e 3% de comissão para o corretor, quanto efetivamente tive que desembolsar?

20) Dois postos de abastecimento misturam água ao álcool que vendem. No primeiro deles foram encontrados 7,5 L de água em 300 de álcool e, no segundo, 13,5 L de água em 500 de álcool. Quanto por cento o álcool de um posto é mais aguado que o do outro?

4. Operações de venda que utilizam porcentagens

Há palavras como *lucro*, *abatimento* e *comissão* que vêm sempre acompanhadas de taxa porcentual, sem a qual perderiam o sentido. Com o que vimos até agora, podemos resolver problemas que envolvem essas expressões sem muita dificuldade. Tomaremos, então, alguns exemplos práticos envolvendo operações comerciais.

Exemplo 1 — Lucro sobre a compra

Por quanto devo vender um objeto que comprei por $ 4 000,00, a fim de obter um lucro de 20% sobre a compra?

Este é o caso mais simples e comum do cálculo de lucro. Entenderemos por lucro a diferença entre o preço de compra e o preço de venda. Para resolver esse problema, o que temos de fazer é aplicar 20% em 4 000:

Porcentagem = 0,20 · 4 000 = 800

Dessa forma, o lucro será de $ 800,00 e o objeto será vendido por $ 4 000,00 + $ 800,00 = $ 4 800,00.

Podemos também achar diretamente o preço de venda, fazendo o seguinte:

Preço de venda = (1 + 0,20) · 4 000 = 1,2 · 4 000 = 4 800

O número 1 que aparece entre parênteses, sendo somado ao 0,20, deve-se ao valor da compra, ou seja, 100% ou $\frac{100}{100} = 1$.

Podemos sempre proceder desta maneira para achar o preço de venda a partir do preço de compra, com uma taxa de lucro sobre este último.

Preço de venda = (1 + taxa sobre a compra) X preço de compra

Exemplo 2 — Prejuízo sobre a compra

Calcular o prejuízo e o preço de venda de um objeto que comprei por $ 6 000,00, tendo uma perda de 30% sobre o preço de compra.

Calcular 30% de prejuízo em $ 6 000,00 é aplicar 30% em 6 000.

Porcentagem = 0,30 · 6 000 = 1 800

Dessa forma, o prejuízo será de $ 1 800,00.

Preço de venda = preço de compra − prejuízo

Então, o preço de venda é:

$ 6 000,00 − $ 1 800,00 = $ 4 200,00

Para calcular diretamente o preço de venda numa operação com prejuízo, podemos usar uma equação semelhante à do exemplo anterior, apenas trocando a soma (1 + taxa) pela diferença (1 − taxa). Assim:

Preço de venda = (1 − taxa sobre a compra) X preço de compra

Exemplo 3 — Lucro sobre a venda

Calcular o lucro e por quanto devo vender um objeto que comprei por $ 4 000,00 para ganhar 20% sobre o preço de venda.

Trata-se de calcular 20% de uma quantia que ainda é desconhecida. O que devemos fazer é considerar este preço de venda desconhecido como 100% e, conseqüentemente, tomar o preço de compra conhecido como 80%, já que o lucro será de 20%.

Assim, poderemos resolver o problema utilizando uma regra de três.

80% ——— 4 000

100% ——— x

Então:

$$x = \frac{100 \cdot 4\,000}{80} = 5\,000$$

O objeto será vendido por $ 5 000,00 com um lucro de $ 1 000,00 (que é $ 5 000,00 − $ 4 000,00), equivalente a 20% sobre a venda.

Podemos também achar rapidamente o preço de venda da seguinte maneira:

4 000 = (1 − 0,20) · preço de venda

4 000 = 0,80 · preço de venda

$$\frac{4\,000}{0{,}8} = \text{preço de venda}$$

Preço de venda = 5 000

Novamente, o número 1 refere-se a 100% ou $\frac{100}{100}$ devido, neste caso, ao próprio preço de venda.

Preço de compra = (1 − taxa sobre a venda) · preço de venda

De modo geral, para calcular o preço de venda em que o lucro é calculado sobre esse mesmo preço, usaremos:

$$\text{Preço de venda} = \frac{\text{preço de compra}}{1 - \text{taxa sobre a venda}}$$

Exemplo 4 — Prejuízo sobre a venda

Calcular o prejuízo e o preço de venda de um objeto que comprei por $ 8 000,00, tendo perdido 25% do preço de venda.

Trata-se de calcular 25% de uma quantia desconhecida. Novamente, vamos considerar essa quantia desconhecida como 100%. Portanto, o preço de compra foi de 125%, já que o prejuízo foi de 25%.

Então:

125% ——— 8 000

100% ——— x

$$x = \frac{8\,000 \cdot 100}{125} = 6\,400$$

Assim, o objeto será vendido por $ 6 400,00.

Podemos também calcular diretamente o preço de venda utilizando uma equação ou fórmula semelhante à do exemplo 3, só que, no lugar da diferença (1 – taxa sobre a venda), devemos utilizar a soma 1 + taxa sobre a venda.

Assim:

$$\text{Preço de compra} = (1 + \text{taxa sobre a venda}) \times \text{preço de venda}$$

ou

$$\text{Preço de venda} = \frac{\text{preço de compra}}{1 + \text{taxa sobre a venda}}$$

Exemplo 5 — Abatimentos sucessivos

Sobre uma fatura de $ 100 000,00 são feitos descontos sucessivos de 10%, mais 6% e mais 3%. Qual é o valor líquido da fatura?

Para resolvermos este problema, devemos calcular descontos sucessivos, ou seja, calcular os descontos sobre as quantias líquidas, já descontadas as taxas anteriores. Assim:

10% de 100 000 = 10 000

A fatura se torna:

100 000 – 10 000 = 90 000

6% de 90 000 = 5 400

A fatura se torna:

90 000 – 5 400 = 84 600

3% de 84 600 = 2 538

A fatura se torna:

84 600 – 2 538 = 82 062

Após os descontos, o valor líquido da fatura será $ 82 062,00.

Poderíamos obter o mesmo resultado de outra forma:

Valor líquido = 100 000 · (1 – 0,10) · (1 – 0,06) · (1 – 0,03)

Nesta expressão, cada parênteses refere-se a um desconto.

Valor líquido = 100 000 · 0,90 · 0,94 · 0,97

Valor líquido = 100 000 · 0,820620 = 82 062

De modo geral, um valor bruto submetido a descontos sucessivos de várias taxas torna-se um valor líquido que pode ser calculado por:

Valor líquido = valor bruto · (1 – 1ª taxa) · (1 – 2ª taxa) · · (1 – 3ª taxa) · ... · (1 – enésima taxa)

Nesta expressão, **n** é o número de taxas sucessivas.

Exercícios resolvidos

9) Por quanto devo vender um carro que comprei por $ 40 000,00 se desejo lucrar 5% sobre a compra?

Solução

Preço de venda = (1 + 0,05) · 40 000
Preço de venda = 1,05 · 40 000
Preço de venda = 42 000

Resposta: Devo vender por $ 42 000,00.

10) Por quanto devo vender um objeto que comprei por $ 1 900,00 para lucrar 5% sobre a venda?

Solução

$$\text{Preço de venda} = \frac{1\,900}{(1 - 0{,}05)}$$

$$\text{Preço de venda} = \frac{1\,900}{0{,}95}$$

$$\text{Preço de venda} = 2\,000$$

Resposta: O preço de venda será de $ 2 000,00.

11) Uma fatura de $ 5 000,00 sofrerá descontos sucessivos de 5% e 8%. Por quanto esta fatura será liquidada?

Solução

$$\text{Valor líquido} = 5\,000 \cdot (1 - 0{,}05) \cdot (1 - 0{,}08)$$

$$\text{Valor líquido} = 5\,000 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}92$$

$$\text{Valor líquido} = 5\,000 \cdot 0{,}8740$$

$$\text{Valor líquido} = 4\,370$$

Resposta: A fatura será liquidada por $ 4 370,00.

12) Na venda de um objeto foram ganhos 5% sobre o preço de venda, ou seja, $ 200,00. Qual foi o preço de custo?

Solução

Se foram ganhos 5% sobre a venda, podemos dizer que o custo corresponde a 95%, pois:

$$\underbrace{95\%}_{\text{custo}} + \underbrace{5\%}_{\text{lucro}} = \underbrace{100\%}_{\text{venda}}$$

Numa regra de três, teremos:

5% ——— 200

95% ——— x

Então:

$$x = \frac{95 \cdot 200}{5} = 3\,800$$

Resposta: O objeto foi comprado por $ 3 800,00.

13) Certo comerciante vendeu mercadorias compradas por $ 1 800,00 com um lucro de 10% sobre a venda. Quanto ganhou o comerciante?

Solução

Já que o lucro foi de 10% sobre a venda, o preço de custo corresponde a 90%, pois 90% + 10% = 100%.

Numa regra de três, teremos:

90% ——— 1 800

10% ——— x

$$x = \frac{10 \cdot 1\,800}{90} = 200$$

Resposta: O comerciante ganhou $ 200,00 na transação.

14) Um comerciante vende bananas com um lucro de 50% sobre o preço de venda. Qual é o seu lucro sobre o preço de custo?

Solução

Já que o lucro é de 50% sobre a venda, o preço de custo corresponde a 50%, pois:

$$\underbrace{50\%}_{\text{compra}} + \underbrace{50\%}_{\text{lucro sobre a venda}} = \underbrace{100\%}_{\text{venda}}$$

Dessa forma, o lucro é igual ao próprio custo.

Resposta: O lucro é de 100% sobre o preço de custo.

15) Uma mercadoria que custava $ 2 500,00 teve um aumento, passando a custar $ 2 700,00. Responda:

a) Qual foi a taxa de aumento sobre o custo?

b) Qual foi a taxa de aumento sobre a venda?

Solução

a) O aumento foi de $ 200,00. O que queremos é determinar quanto por cento $ 200,00 representa de $ 2 500,00.

Neste caso, a regra de três é mais fácil. Veja:

2 500 ——— 100

200 ——— x

$$x = \frac{200 \cdot 100}{2\,500} = 8$$

Resposta: O aumento foi de 8% em relação ao custo.

b) Quanto $ 200,00 representa em $ 2 700,00?

Novamente, devemos aplicar a regra de três:

2 700 ——————— 100

200 ——————— x

$$x = \frac{200 \cdot 100}{2\,700} \Rightarrow x \cong 7{,}407$$

Resposta: O lucro foi de aproximadamente 7,407% sobre a venda.

Exercícios propostos

21) Por quanto deverá ser vendida uma mercadoria comprada por $ 250,00 para que o lucro sobre a venda corresponda a 40% da compra?

22) Uma mercadoria comprada por $ 350,00 foi vendida por $ 420,00. Qual foi a porcentagem de lucro sobre a compra?

23) Por quanto devo vender uma peça de tecido comprada por $ 3 000,00 para obter 40% de lucro sobre a venda?

24) Sobre uma fatura de $ 36 000,00 são dados descontos de 4% e 6% para pagamento antecipado. Qual o valor líquido da fatura?

25) Vendi um carro por $ 42 000,00, obtendo um lucro de 40% sobre a compra. Por quanto comprei o carro?

26) Investindo $ 15 000,00 à taxa fixa de 20%, quanto terei de lucro?

27) Qual a quantia que devo investir para, a uma taxa de 110%, receber de volta $ 11 000,00?

28) Uma fatura sofreu abatimento de 13%, resultando num valor líquido de $ 4 350,00. Qual era o valor inicial dessa fatura?

29) Vendendo uma partida de milho por $ 5 400,00, terei um prejuízo de 10% sobre o preço de compra. Quanto me custou o milho?

30) Um negócio realizado com 30% de lucro sobre a venda rendeu $ 300 000,00. Qual foi o preço de compra?

31) Quanto paguei por uma casa se, ao vendê-la por $ 56 000,00, tive um prejuízo de 20% sobre o preço de custo?

32) Sobre uma fatura de $ 2 000,00 obtive um desconto de 10% e, em seguida, um outro desconto que reduziu minha fatura a um valor líquido de $ 1 530,00. De quanto foi o segundo desconto?

33) A comissão de um vendedor é de 8% sobre os produtos vendidos. Tendo recebido $ 1 500,00, quanto ele vendeu?

34) Lucrei $ 300,00 num investimento, a uma taxa de 15% sobre o valor inicial. Quanto investi?

35) Uma fatura de $ 1 000,00 foi saldada com descontos de 10% e 5%. Que taxa única de desconto daria o mesmo valor líquido?

36) O salário real de um trabalhador aumentou de $ 1 200,00 para $ 1 806,00. De quanto por cento foi o aumento?

37) Calcule por quanto deve ser vendido um objeto comprado por $ 35 200,00 para se obter uma taxa de lucro de 12% sobre a venda.

38) Um objeto comprado por $ 20 125,00 foi vendido por $ 25 000,00, com um determinado lucro calculado sobre a venda. Qual foi a taxa porcentual desse lucro?

39) Um automóvel comprado por **x** foi vendido por **2x**. Qual foi a taxa de lucro calculada sobre a venda?

40) Ao vender um terreno, ganhei 20% sobre o preço da venda. Se paguei $ 32 000,00 pelo terreno, quanto recebi pela venda?

41) Uma loja quer anunciar 50% de desconto, mas precisa aumentar um pouco o seu preço para não ter prejuízo. Qual deverá ser a taxa de aumento sobre um artigo que custa $ 400,00 para que, com 50% de desconto, ele seja vendido por $ 250,00?

42) Sobre a nota fiscal de certa mercadoria incidem normalmente 15% de IPI (Imposto sobre Produtos Industrializados), pagos pelo comerciante. Por quanto deverá ser vendida uma mercadoria comprada por $ 100,00 para que o comerciante tenha um lucro de 30% sobre a compra e ainda repasse o IPI para o comprador?

43) Um comerciante compra 60 kg de feijão e quer vendê-los de modo a poder comprar, com o dinheiro da venda, 80 kg do mesmo feijão. Para tanto, qual deverá ser a taxa de lucro do comerciante sobre a compra?

44) Uma certa indústria retém 12% do que deve pagar a qualquer autônomo que lhe prestar serviços. Após esse desconto, outros 6% são retidos para pagamento de imposto de renda. Qual é o pagamento bruto de um trabalhador autônomo que recebeu um pagamento líquido de $ 992,64?

45) Quanto por cento de prejuízo tive sobre a venda de um objeto que me custou $ 300,00 e foi vendido por $ 210,00?

5. Algumas aplicações práticas de porcentagem

Alguns problemas, como cálculo de impostos comerciais, desvalorização do dinheiro, descontos trabalhistas e índice de reajustes, fazem parte de nosso dia-a-dia.

Ainda que dispensando um estudo teórico mais aprofundado, todos esses assuntos serão tratados aqui com muito cuidado, pois a todo momento estamos nos relacionando com eles. Vejamos isso por meio de alguns exemplos.

Exemplo 1 — Ágio e deságio

No capítulo 4, estudamos algumas operações cambiais que envolviam moedas de vários países. Neste capítulo, estudaremos a depreciação ou valorização que uma moeda pode sofrer numa determinada época.

Suponha, por exemplo, que uma moeda **x**, com o seu preço de compra estimado ontem em $ 1,20, custe hoje $ 1,22 para o comprador. Para calcular a taxa porcentual de aumento, basta aplicar os conhecimentos já adquiridos.

Principal = 1,20

Porcentagem = 1,22 − 1,20 = 0,02

Porcentagem = taxa · principal

$0{,}02 = i \cdot 1{,}20$

$$i = \frac{0{,}02}{1{,}20}$$

$i \cong 0{,}0167$

A moeda **x** aumentou, portanto, 1,67% de ontem para hoje. Esse porcentual de aumento na cotação de uma moeda, numa determinada época, é chamado de *ágio*. Em contrapartida, a desvalorização é chamada de *deságio* da moeda.

Qual seria, então, o deságio de uma moeda em relação ao dólar americano que passou de $ 4,94 para $ 5,25 em 20 dias?

Para resolver esse problema, devemos fazer o seguinte:

Principal = 4,94

Porcentagem = 5,25 − 4,94 = 0,31

Porcentagem = taxa · principal

0,31 = i · 4,94

i ≅ 0,0627

Portanto, o deságio dessa moeda, ou ágio do dólar, foi de 6,27%.

Exemplo 2 — INSS retido em folha de pagamento

Do salário bruto de todo trabalhador, uma parte é descontada em folha e destinada ao INSS (Instituto Nacional de Seguridade Social), para que este organize e assuma a assistência à saúde e a aposentadoria dos trabalhadores. A contribuição dos trabalhadores é de 8% a 11%, sendo estabelecido um valor mínimo ($ 8,96) e um valor máximo ($ 155,33) para ela. A seguir apresentamos uma tabela fictícia para as taxas desse desconto.

Salário	Taxa
até 3 salários	8%
de 3 a 5 salários	8,5%
de 5 a 7 salários	9%
de 7 a 9 salários	10%
acima de 10 salários	11%

Supondo que o salário mínimo vigente seja de $ 120,00, vamos calcular a contribuição ao INSS de um trabalhador que receba, por exemplo, $ 972,00 mensais.

Em primeiro lugar, devemos transformar o salário em questão em salários mínimos. Observe a regra de três:

1 salário mínimo ——— 120,00

x ——— 972,00

$$x = \frac{972}{120} = 8{,}10$$

Assim, a contribuição será de aproximadamente 10%.

Para saber quanto é 10% de $ 972,00, basta aplicarmos o seguinte cálculo:

Porcentagem = capital · taxa

Porcentagem = 972 · 0,10

Porcentagem = 97,2

Portanto, a quantia referente a 10% do salário bruto, destinada ao INSS, será de $ 97,20.

Exemplo 3 — Imposto de renda retido na fonte

Uma parte do que é ganho pelo contribuinte — seja ele assalariado ou não — é destinada à receita federal. Essa parte é o *imposto sobre a renda* ou, simplesmente, *imposto de renda*. Segundo a legislação em vigor, o imposto é deduzido do trabalhador assalariado a partir de taxas fixadas.

Para entender melhor, veja a tabela a seguir que será usada como referência.

Tabela do IR

Rend. em agosto de 1997 (R$)	**Alíquota** (%)	**Deduzir** (R$)
Até 900,00	Isento	—
Acima de 900,00 até 1 800,00	15,0	135,00
Acima de 1 800,00	25,0	315,00

De acordo com essa tabela, para a determinação da renda líquida mensal sujeita ao desconto do imposto, são necessárias algumas deduções:

- R$ 90,00 por dependente legal;
- R$ 900,00 por aposentadoria para o contribuinte com mais de 65 anos;
- o valor correspondente à pensão alimentícia, se houver;
- o valor da contribuição paga mensalmente à Previdência Social.

Ao salário deduzido, aplica-se a alíquota correspondente na segunda coluna da tabela e, em seguida, deduz-se o valor da última coluna.

Como exemplo, vamos calcular o imposto retido na fonte do salário de um trabalhador que tenha dois dependentes e receba mensalmente um salário bruto de $ 2 600,00.

Inicialmente, descontamos $ 180,00 que correspondem aos dependentes e $ 105,33 destinados à Previdência Social:

2 600 − (180 + 105,33) = 2 314,67

Para calcular o valor do imposto de renda a ser abatido, devemos proceder da seguinte forma:

IR = (alíquota) · (renda líquida) − (parcela a deduzir)

Aplicando a alíquota sobre a renda líquida, temos:

2 314,67 · 0,25 ≅ 578,67

Em seguida, deduzimos o valor referente à taxa de 25%:

578,67 − 315,00 = 263,67

Assim, a quantia referente ao imposto de renda retido na fonte desse trabalhador será de $ 263,67.

Exemplo 4 — Encargos sociais da empresa

Sobre o total da folha de pagamento de uma empresa incidem certas taxas de descontos, referentes aos encargos sociais que a empresa deve pagar a algumas instituições.

Os encargos sociais de uma empresa e suas respectivas taxas variam de acordo com sua natureza, ou seja, os valores a serem abatidos dependem de sua área de atuação.

São exemplos de encargos:

- PIS (Programa de Integração Social);
- FGTS (Fundo de Garantia por Tempo de Serviço);
- INSS (Instituto Nacional de Seguridade Social);
- Taxas de seguros contra acidentes de trabalho pagas ao Ministério da Previdência e Assistência Social.

Dependendo também de acordos sindicais estabelecidos, além das características da empresa, outros encargos podem ser abatidos. É o caso, por exemplo:

- da cesta básica;
- do vale transporte;
- do seguro coletivo;
- do seguro saúde.

Como exemplo para a utilização desses dados, usaremos uma empresa fictícia que paga, sobre uma folha de pagamento de $ 3 300 000,00, as seguintes taxas:

- 1% para o PIS;
- 0,4% para o seguro contra acidentes de trabalho;
- 8% para o FGTS;
- 10% para o INSS.

- PIS:

1% de $ 3 300 000,00

$0{,}01 \cdot 3\,300\,000{,}00 = \$\ 33\,000{,}00$

- Seguro contra acidentes de trabalho:

0,4% de $ 3 300 000,00

$0{,}004$ de $3\,300\,000{,}00 = \$\ 13\,200{,}00$

- FGTS:

8% de $ 3 300 000,00

$0{,}08 \cdot 3\,300\,000{,}00 = \$\ 264\,000{,}00$

- INSS:

10% de $ 3 300 000,00

$0{,}1 \cdot 3\,300\,000{,}00 = \$\ 330\,000{,}00$

Como o total de encargos pago pela empresa é obtido pela soma dos valores dos descontos, temos:

$33\,000{,}00 + 13\,200{,}00 + 264\,000{,}00 + 330\,000{,}00 = 640\,200{,}00$

Portanto, o total de encargos pago por essa empresa é de $ 640 200,00.

Exemplo 5 — Rendimento de caderneta de poupança

Ao colocarmos dinheiro numa caderneta de poupança, temos que o rendimento será calculado da seguinte forma:

- mensalmente, sobre o menor saldo da caderneta num determinado período;
- com a correção monetária vigente no período;
- com juro de 0,5% ao mês, aplicado sobre a quantia já corrigida pelo índice de correção.

Vamos calcular o rendimento de uma caderneta de poupança que transcorreu o mês de fevereiro com $ 75 000,00 aplicados, sabendo que a data de aniversário desta conta é dia 1º e que a correção vigente no período foi de 1,796%.

Correção monetária:

$$\frac{1{,}796}{100} \cdot 75\,000 = 1\,347$$

Quantia corrigida:

$75\,000 + 1\,347 = 76\,347$

Juro (J):

$$J = \frac{0,5}{100} \cdot 76\,347 \cong 381,74$$

Quantia corrigida (final):

76 347 + 381,74 = 76 728,74

Assim, o aumento foi de:

$ 1 347,00 + $ 381,74 = $ 1 728,74 (que corresponde aproximadamente à taxa de 2,30%).

Caso o investidor não retire o rendimento ao término do período, os próximos índices deverão incidir cumulativamente sobre a quantia corrigida.

Exercícios propostos

Para concluir estes exercícios, consulte sempre que necessário a tabela fictícia para o cálculo do INSS, apresentada neste capítulo.

46) Calcule o valor correspondente ao INSS a ser descontado do salário de um trabalhador que recebe um salário bruto de $ 890,00.

47) A moeda de um determinado país vale hoje $ 1,20 no Brasil e, ontem, valia $ 1,50. Houve ágio ou deságio desse dinheiro? De quanto por cento?

48) O dólar, que em certo dia estava cotado a $ 4,91, sofre um ágio de 0,03%. A quanto estaria o dólar no dia seguinte?

49) Quanto deve ser retido de imposto de renda na fonte de um trabalhador sem dependentes e que recebe um salário de $ 2 820,00?

50) José Florisberto tem dois dependentes e recebe um salário bruto de $ 6 000,00 mensais. Supondo que os únicos descontos que ele sofrerá serão do INSS e do imposto de renda, calcule o salário líquido desse trabalhador. Tome como referência um salário mínimo de $ 1 600,00.

51) Qual será o salário líquido de um trabalhador com um único dependente se seu salário bruto é de $ 4 600,00?

52) Calcule o total dos encargos sociais de uma empresa em que o valor bruto dos pagamentos chega a $ 120 000,00, somando-se as taxas de PIS (1%), FGTS (8%) e seguro contra acidente de trabalho (0,4%).

53) Uma bonificação é paga mensalmente a um trabalhador, na base de 5% do salário mínimo vigente para cada filho que tiver, independentemente do total de seu salário. Quanto deverá receber de bonificação um funcionário com dois filhos, supondo o salário mínimo a $ 120,00?

54) Quantos dependentes tem um operário que recebe a 5ª parte de um salário mínimo, referente a uma bonificação de 2% sobre o salário mínimo?

55) Uma vez por ano é descontada do trabalhador uma parcela de seu salário, referente à taxa assistencial destinada ao sindicato de sua categoria trabalhista. O valor e o mês de incidência dessa taxa variam de acordo com a categoria de sua empresa. Calcule o salário de um professor que teve descontado, em maio, $ 67,50 de taxa assistencial, sabendo que o índice para a sua categoria é de 5%.

56) Um professor **x** ganha $ 30,00 por aula, dá 30 aulas por semana e recebe por 5 semanas trabalhadas. Calcule o salário líquido desse professor, considerando que ele tem dois dependentes e que sobre o seu salário incidem as taxas de INSS e imposto de renda. Para tanto, suponha que o salário mínimo é de $ 120,00.

57) Calcule o rendimento de uma caderneta de poupança que transcorreu o mês de fevereiro com $ 42 000,00 aplicados, sabendo que a data de aniversário dessa conta é dia 5 e que o índice de correção de fevereiro foi de 1,796%.

58) Calcule o rendimento, até 2 de março, de uma caderneta de poupança aberta dia 2 de janeiro com $ 20 000,00, sabendo que o índice de correção de janeiro foi de 1,651% e o de fevereiro, de 1,796%.

Problemas e testes de concursos

1) (BB) Tendo vendido um objeto por $ 144,00, uma pessoa perdeu 10% sobre o preço de compra. Qual foi o preço de compra?

2) (BB) Um comerciante comprou uma partida de 10 sacas de batatas por $ 2 100,00. Por quanto ele deve vender cada saca para obter um lucro total de 15%?

3) (BB) Uma casa que está alugada por $ 8 400,00 por ano foi comprada por $ 86 000,00. Durante o ano, o proprietário gastou $ 1 090,00 em impostos e reparos do imóvel. Responda qual foi a taxa de rendimento do capital empregado.

4) (BB) Um comerciante comprou 350 L de aguardente a $ 1,35 o litro. Que quantidade de água ele deve juntar à aguardente para vender o litro a $ 1,75 e ganhar 30% sobre o preço de compra?

5) (BB) Num concurso prestado por um certo número de candidatos houve 18% de aproveitamento, ou seja, 117 aprovados. Num outro concurso, a que concorreram 350 candidatos, houve 22% de aproveitamento. Determine quantos candidatos se submeteram ao primeiro concurso e quantos foram aprovados no segundo.

6) (BB) Calcule o prejuízo de certo comerciante que vendeu suas mercadorias por $ 36 394,40, perdendo nessa transação a quantia equivalente a 3% sobre o preço de custo.

7) (BB) Sabendo que certo comerciante recebeu $ 3 515,00 por mercadorias vendidas com um desconto de $ 185,00, determine a taxa porcentual do referido desconto.

8) (BB) Determine por quanto se deve vender certa mercadoria comprada por $ 3 500,00, para se obter um lucro de 6,7% sobre o preço de custo.

9) (BB) Certa mercadoria foi vendida por $ 20 602,80, com um prejuízo de 12,7% sobre o preço de compra. Por quanto deveria ser vendida essa mercadoria para que houvesse um lucro de 15% sobre o seu custo?

10) (BB) Tenho duas soluções de água e álcool. A primeira contém 279 L de álcool e 1 116 L de água. A segunda contém 1 155 L de álcool e 4 095 de água. Qual é a solução mais alcoólica? De quanto por cento é essa diferença?

11) (BB) Certa mercadoria foi vendida por $ 23 540,00, com um lucro de 7% sobre o preço de compra. Em seguida, foi revendida por $ 26 600,20. De quanto por cento foi o lucro final sobre o valor inicial dessa mercadoria?

12) (BB) Certa partida de mercadorias foi vendida por $ 21 516,30, com um lucro de $ 3 126,30 sobre o preço de custo. Calcule de quanto por cento foi esse lucro.

13) (BB) Um comerciante comprou várias peças de tecido por $ 47 200,00 e uma partida de arroz por $ 35 100,00. O tecido foi vendido com 7% de prejuízo e o arroz, com 11,5% de lucro. Ao todo quanto ele ganhou e quanto perdeu?

14) (BB) Determinado comerciante comprou uma peça de tecido de 438 m, ao custo de $ 148,00 o metro. Em seguida, vendeu 315 m com 35% de lucro e o restante foi vendido com um certo prejuízo. Sabendo que a venda de todo o tecido, nas condições acima, deixou $ 15 406,80 de lucro líquido, calcule o preço pelo qual foi vendido o metro do tecido em cada caso.

15) (BB) Calcule o valor líquido de uma Guia de Recolhimento de Imposto Sindical no valor de $ 6 000,00 que sofreu uma redução de 20% sobre esse valor total e, em seguida, outro abatimento de 6% sobre o valor líquido da primeira redução.

16) (BB) Certa mercadoria foi comprada e revendida sucessivamente por quatro negociantes. Cada um dos dois primeiros obteve, por ocasião da revenda, um lucro de 10% sobre o respectivo preço de compra. Os dois últimos sofreram um prejuízo de 10% cada um, também sobre o respectivo preço de compra. Calcule o preço pelo qual o primeiro negociante adquiriu a mercadoria, visto que o quarto a vendeu por $ 2 450,25.

17) (TTN) Um automóvel, com velocidade de 80 km/h, percorre uma estrada em 1h 30min. Em quanto tempo esse automóvel percorrerá $\frac{3}{5}$ da mesma estrada com 25% da velocidade inicial?

a) 3h 36min
b) 3h
c) 3h 30min
d) 2h 16min
e) 2h 36min

18) (TTN) João comprou diretamente de uma fábrica um conjunto de sofás ao preço de $ 322 000,00, incluindo o imposto sobre produtos industrializados (IPI). Sabendo que a alíquota do imposto é de 15% *ad valorem*, o valor do imposto foi de:

a) $ 40 000,00.
b) $ 42 000,00.
c) $ 45 000,00.
d) $ 46 000,00.
e) $ 48 000,00.

19) (TTN) Uma indústria possui em seu reservatório 0,25 dam^3 + 150 m^3 + 22 000 dm^3 + + 3 000 000 cm^3 de óleo de soja. Pretendendo-se embalar o produto em latas de 900 mL e sabendo que no processo de embalagem há uma perda de 1% do líquido, o número de latas de soja a ser produzido por essa indústria será de:

a) 467 500.
b) 460 300.
c) 425 300.
d) 456 800.
e) 459 500.

20) (TTN) A empresa Vestebem comprou o produto **A** pagando 10% de imposto sobre o preço de aquisição da mercadoria e 30% de despesa com transporte sobre o preço da mercadoria com o imposto. Sabendo que na venda de **A** foi obtido um lucro de $ 143,00, correspondente a 20% sobre o preço de aquisição e outras despesas (imposto e transporte), o preço de aquisição da mercadoria com o imposto foi de:

a) $ 550,00.
b) $ 580,00.
c) $ 540,00.
d) $ 570,00.
e) $ 560,00.

21) (AFTN) Três pessoas formaram uma sociedade participando com a mesma quantia. O capital da 1ª pessoa esteve empregado durante 2 anos, o da 2ª pessoa, durante 3 anos e o da 3ª pessoa, durante 20 meses. Se o lucro auferido foi de $ 400 000 000,00, quanto receberá a 1ª pessoa, sabendo que ela ainda tem 10% a mais de lucro para receber?

a) $ 108 000 000,00
b) $ 120 000 000,00
c) $ 148 000 000,00
d) $ 160 000 000,00
e) $ 200 000 000,00

CAPÍTULO 6

JUROS SIMPLES

1. Introdução

Nos preços de vendas de objetos expostos em vitrinas de lojas, geralmente se observam cartazes com dizeres do tipo:

$ 2 400,00 à vista

ou em 6 prestações de $ 520,00

O comprador já sabe que a prazo o preço aumenta. Para o vendedor, tudo transcorre como se ele estivesse emprestando $ 2 400,00 ao comprador, que os devolverá com um acréscimo referente ao seu aluguel. Esse acréscimo é chamado de *juros*.

O mesmo acontece nos empréstimos pessoais em bancos ou nos financiamentos de quaisquer bens; mas esses juros nem sempre são calculados da mesma maneira. Neste capítulo estudaremos o cálculo de juros simples.

2. Juros simples

Em geral, os juros são calculados periodicamente: ao final de um dia, de um mês, de um ano ou de qualquer outro período pré-fixado por ocasião do investimento ou empréstimo.

Se os juros têm taxa fixa e são calculados sempre a partir da quantia inicial, são chamados de *juros simples*.

Como exemplo, considere um empréstimo de $ 2 000,00 pelo qual deverão ser pagos 5% de juros simples por mês. Para saber de quanto serão os juros ao final de um mês, basta calcular:

5% de $ 2 000,00 = 0,05 · 2 000 = 100

No segundo mês, estes juros dobram, no terceiro triplicam, e assim por diante. Para calcular os juros num período **n** de tempo, poderíamos fazer:

Juros = 2 000 · 0,05 · n

De modo geral, os juros simples **J**, resultantes da aplicação de um capital **C** a uma taxa **i**, durante um período **n** de tempo, podem ser calculados pela fórmula:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

Aqui, naturalmente, **i** e **n** devem ter as mesmas unidades. Por exemplo: se temos uma taxa diária, **n** deverá ser calculado em dias; se a taxa for mensal, **n** deverá ser calculado em meses, etc.

Exercícios resolvidos

1) Qual é o juro simples que um capital de $ 30 000,00 produz, quando aplicado durante cinco meses, a uma taxa de 3,5% a.m. (ao mês)?

Solução

$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow J = 30\,000 \cdot 0{,}035 \cdot 5$

$J = 5\,250$

Resposta: O juro é de $ 5 250,00.

2) Qual é o juro simples que um capital de $ 2 500,00 rende quando aplicado durante um ano, à taxa mensal de 2%?

Solução

$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow J = 2\,500 \cdot 0{,}02 \cdot 12$

$J = 600$

Resposta: O juro é de $ 600,00.

3) Um capital de $ 10 000,00, investido a juros simples de 13% ao ano, foi sacado após três meses e dez dias, a contar da data inicial do investimento. Qual foi o juro?

Solução

Na resolução deste problema é importante tomar cuidado com as unidades de tempo. Assim:

3 meses e 10 dias = 100 dias

Daí, temos:

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow J = 10\,000 \cdot 0{,}13 \cdot \frac{100}{360}$$

Observe que o período **n** foi reduzido a anos, uma vez que dividimos o número de dias por 360, que é o ano comercial.

$$J = 10\,000 \cdot 0{,}13 \cdot \frac{100}{360}$$

$$J = 361{,}11$$

Resposta: O juro é de $ 361,11.

O mesmo efeito seria obtido através do seguinte cálculo:

$$J = 10\,000 \cdot 0{,}13 \cdot \frac{3\frac{1}{3}}{12}$$

Veja que, nesse caso, utilizamos o tempo em meses, pois:

3 meses e 10 dias $= 3\frac{1}{3}$ meses

4) Qual é a taxa mensal de juros simples que deverá incidir sobre um capital de $ 5 000,00 para que este, em quatro meses e meio, renda $ 720,00?

Solução

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow 720 = 5\,000 \cdot i \cdot 4{,}5$$

$$\frac{720}{5\,000 \cdot 4{,}5} = i$$

$$i = 0{,}032$$

Resposta: A taxa deverá ser de 3,2% ao mês.

5) Que capital inicial rende $ 2 000,00 em cinqüenta dias, a uma taxa simples de 0,2% a.d. (ao dia)?

Solução

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow 2\,000 = C \cdot 0{,}002 \cdot 50$$

$$\frac{2\,000}{0{,}002 \cdot 50} = C$$

$$C = 20\,000$$

Resposta: O capital inicial é de $ 20 000,00.

6) Qual a taxa mensal de juros simples que deve incidir num capital para que ele duplique de valor em um ano?

Solução

Neste caso, o juro é igual ao próprio capital.

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow C = C \cdot i \cdot 12$$

$$\frac{C}{C \cdot 12} = i \Rightarrow i = \frac{1}{12} = 0{,}0833\ldots$$

A taxa, portanto, será de 8,33% ao mês.

Observação: Se calculada anualmente, essa mesma taxa se tornaria, evidentemente, 100% (afinal, o capital dobrou!). Portanto:

8,33% a.m. = 100% a.a.

Resposta: A taxa será de 8,33% a.m.

3. Taxa e período

Como já foi observado nos problemas de juros, devemos tomar um cuidado especial no manejo das taxas e dos períodos de tempo, a fim de não tratá-los com unidades diferentes.

Precisamos prestar atenção também no fato de que os juros podem ser calculados com base no mês e no ano comercial (30 e 360 dias, respectivamente) ou com base no mês e no ano civil. Neste segundo caso, será necessário recorrermos à *tabela 1* no final do livro. Agora, trataremos destes problemas por meio de exemplos.

Exemplo 1

Calcular os juros simples que um capital de $ 2 500,00 rende à taxa de 2,7% a.m., quando aplicado de 1º de fevereiro até 14 de maio.

Na resolução desse problema usamos a tabela 1 para a contagem dos dias. Assim, temos:

1º de janeiro — 1º de fevereiro — 14 de maio

32 (tabela) — 134 (tabela)

$134 - 32 = 102$ = número de dias entre 1º de fevereiro e 14 de maio

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow J = 2\,500 \cdot \frac{0{,}027}{30} \cdot 102$$

$$J = 229{,}50$$

Portanto, o juro foi de $ 229,50.

Exemplo 2

Um investimento a juros simples, realizado com base no ano civil em 18 de julho e à taxa anual de 20%, rendeu $ 118,40 de juros em 30 de setembro. Calcular a quantia investida.

Para a contagem dos dias, nesse exemplo, temos:

$273 - 199 = 74$ = número de dias de 18 de julho a 30 de setembro

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow 118{,}40 = C \cdot \frac{0{,}20}{360} \cdot 74$$

$$\frac{118{,}40 \cdot 360}{0{,}20 \cdot 74} = C$$

$$C = 2\,880$$

Portanto, a quantia investida foi de $ 2 880,00.

Exemplo 3

Um banco anuncia que um investimento de $ 9 523,80 rende em seis meses a quantia de $ 1 047,62. De quanto será a taxa anual, calculada com base no ano comercial?

Lembrando que $J = C \cdot i \cdot n$, vem:

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow 1\,047{,}62 = 9\,523{,}80 \cdot \frac{i}{360} \cdot 180$$

Sabendo que o ano comercial tem 360 dias, temos:

$$\frac{1\,047{,}62 \cdot 360}{9\,523{,}80 \cdot 180} = i$$

$$i = 0{,}22$$

Portanto, a taxa anual será de 22%.

Exemplo 4

Calcular em quanto tempo um capital de $ 1 200,00 renderá $ 144,00 de juros, quando aplicado a uma taxa de 3% a.m.

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow 144 = 1\,200 \cdot 0{,}03 \cdot n$$

$$n = \frac{144}{1\,200 \cdot 0{,}03} \Rightarrow n = 4$$

Como a taxa é mensal, o tempo encontrado também é dado em meses. Portanto, serão necessários 4 meses.

Exemplo 5

Calcular os juros de $ 1 200,00, aplicados a uma taxa de 15% a.a., durante três meses e dez dias.

Um dos modos de resolver esse problema é aplicar o *método dos divisores fixos*, que consiste em utilizar uma tabela pré-calculada (ver tabela 2, no final do livro) para valores de $\frac{360}{i}$, cujo aparecimento pode ser explicado da seguinte maneira:

Sabemos que a expressão $J = C \cdot i \cdot n$ pode se reduzir a $J = \frac{C \cdot i \cdot n}{360}$, se a taxa **i** for anual e o período **n** for diário. Chamando $\Delta = \frac{360}{i}$, temos:

$$J = \frac{C \cdot n}{\Delta}$$

Voltando ao nosso problema, em que i = 15% a.a., obtemos (por meio da tabela 2) $\Delta = 2\,400$. Assim:

$$J = \frac{1\,200 \cdot 100}{2\,400}$$ (Observe que três meses e dez dias correspondem a 100 dias.)

$$J = 50$$

Portanto, os juros são de $ 50,00.

Exemplo 6

Calcular o juro que rende um capital de $ 8 000,00 quando aplicado durante 7 meses e 15 dias, à taxa anual de 30%.

Pela tabela 2, o valor de Δ para $\frac{360}{0,3}$ é igual a 1 200. Assim:

$J = \frac{8\,000 \cdot 225}{1\,200}$ (Observe que 7 meses e 15 dias correspondem a 225 dias.)

$J = 1\,500$

Portanto, os juros são de $ 1 500,00.

4. Montante

Há problemas em que é necessário trabalhar com a soma do capital mais os juros. O resultado dessa soma recebe o nome de *montante*, ou seja:

$M = C + J$

Nessa expressão, **M** é o montante, **C** é o capital e **J** os juros.

Como $J = C \cdot i \cdot n$, podemos reescrever a expressão acima da seguinte maneira:

$M = C + C \cdot i \cdot n$

Colocando **C** em evidência, temos:

$$M = C(1 + i \cdot n)$$

Esta fórmula relaciona o montante com o capital, com a taxa e com o período de tempo.

Exercícios resolvidos

7) Qual será o montante resultante de uma aplicação de $ 29 800,00, à taxa de 1,2% a.m., durante 6 meses?

Solução

Como o capital aplicado é de $ 29 800,00, é preciso inicialmente calcular os juros.

$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow J = 29\,800 \cdot 0,012 \cdot 6$

$J = 2\,145,60$

Como os juros são de $ 2 145,60, o montante será de:

$ 29 800,00 + $ 2 145,60 = $ 31 945,60

Poderíamos também resolver esse problema aplicando a seguinte fórmula:

$M = C(1 + i \cdot n)$

Assim, temos:

$M = 29\,800(1 + 0{,}012 \cdot 6)$

$M = 29\,800 \cdot 1{,}072 = 31\,945{,}60$

Resposta: O montante será de $ 31 945,60.

8) Coloquei uma certa quantia em um banco a 12% a.a. e retirei, depois de 4 anos, $ 928,00. Quanto recebi de juros, sabendo que a aplicação foi feita à base de juros simples?

Solução

Temos neste problema:

$M = 928,\ i = 0{,}12$ e $n = 4$

Como $J = C \cdot i \cdot n$, então:

$J = C \cdot 0{,}12 \cdot 4$

$J = 0{,}48C$

Mas, como $M = C + J$:

$928 = C + 0{,}48C$

$928 = 1{,}48C$

$$C = \frac{928}{1{,}48}$$

$C \cong 627{,}03$

O capital investido foi, portanto, de $ 627,03.

Para achar os juros, basta subtrair o montante do capital:

$M = C + J \Rightarrow J = M - C$

$J = 928 - 627{,}03$

$J = 300{,}97$

Poderíamos também resolver o problema aplicando as fórmulas $M = C(1 + i \cdot n)$ ou $C = \frac{M}{1 + i \cdot n}$.

Nessas fórmulas, substituindo as letras pelos valores, temos:

$$C = \frac{928}{1 + 0{,}12 \cdot 4}$$

$$C = \frac{928}{1{,}48}$$

$$C = 627{,}03$$

Resposta: Os juros serão de $ 300,97, pois $M = C + J \Rightarrow$
$\Rightarrow J = M - C = 928 - 627{,}03$.

9) Emprestei uma certa quantia a 12% ao ano e recebi $ 3 230,00 depois de 2 anos e 4 meses. Quanto emprestei?

Solução

Sabendo que 2 anos e 4 meses é o mesmo que 28 meses, é preciso converter o tempo em anos:

$n = \frac{28}{12}$, $M = 3\,230$ e $i = 0{,}12$

Aplicando a fórmula já vista, temos:

$$M = C(1 + i \cdot n) \Rightarrow C = \frac{M}{1 + i \cdot n}$$

$$C = \frac{3\,230}{1 + 0{,}12 \cdot \frac{28}{12}}$$

$$C = \frac{3\,230}{1 + 0{,}28}$$

$$C = \frac{3\,230}{1{,}28}$$

$$C \cong 2\,523{,}44$$

Resposta: Emprestei $ 2 523,44.

10) A que taxa anual um certo capital deve ser aplicado para que, num prazo de 2 anos, triplique de valor?

Solução

Para um capital **C**, temos:

$M = 3C$

Aplicando a fórmula $M = C(1 + i \cdot n)$, vem:

$3C = C(1 + i \cdot n)$

$\frac{3C}{C} = 1 + i \cdot n$

$3 = 1 + i \cdot n$

$i = \frac{2}{n}$

Como $n = 2$ anos, então:

$i = \frac{2}{2} = 1$

Portanto, a taxa anual é de 100%.

Resposta: O capital deve ser aplicado a uma taxa anual de 100%.

5. A tabela de juros simples

Podemos realizar os cálculos de juros simples mais rapidamente, se utilizarmos valores já previamente calculados e tabelados de **i** e **n**. A *tabela 3* no final do livro é um exemplo disso. Nela, encontraremos valores de **i** · **n**, para **i** ao mês e **n** em dias. Vamos consultá-la para resolver as questões apresentadas nos exemplos que seguem.

Exemplo 1

De quanto será o juro simples produzido por um capital de $ 300 000,00, aplicado à taxa de 8% a.m., durante treze dias?

Recorrendo à tabela 3, encontraremos para a taxa de 8% e para um prazo de 13 dias o fator 0,0347. Como $J = C \cdot i \cdot n$, temos:

$J = 300\,000 \cdot 0{,}0347$

$J = 10\,410$

O juro será, portanto, de $ 10 410,00.

Exemplo 2

Calcular o juro simples de uma aplicação de $ 1 500,00, à taxa mensal de 10%, durante 27 dias.

Pela tabela 3, para i = 10% e n = 27, temos o fator 0,0900.

$J = C \cdot i \cdot n$

$J = 1\,500 \cdot 0{,}0900$

$J = 135$

Assim, o juro será de $ 135,00.

Exemplo 3

Calcular o montante de uma aplicação a juros simples de um capital de $ 250 000,00, à taxa mensal de 11%, feita em 14 de março e resgatada em 3 de abril do mesmo ano.

Inicialmente, precisamos encontrar o número de dias da aplicação. Para isso, é preciso recorrer à tabela 1.

14 de março	3 de abril
73 (tabela)	93 (tabela)

$93 - 73 = 20$ (dias da aplicação)

Em seguida, recorremos à tabela 3.

Como i = 11% e n = 20, temos o fator 0,0733. Assim:

$J = C \cdot i \cdot n$

$J = 250\,000 \cdot 0{,}0733$

$J = 18\,325$

$M = C + J = 250\,000 + 18\,325$

$M = 268\,325$

Portanto, o montante foi de $ 268 325,00.

Também é possível encontrar diretamente esse montante, multiplicando o capital pelo fator 1,0733. Assim:

$M = C + C \cdot 0{,}0733$

$M = C \cdot 1{,}0733$

Exercícios propostos

1) Calcule os juros anuais de $ 1 250,00 à taxa de 5% a.a.

2) Calcule os juros mensais de $ 1 680,45 à taxa de 9% a.a.

3) Calcule o juro produzido por $ 500,00, à taxa de 80% a.a., durante 45 dias.

4) Qual será o rendimento de $ 1 800,00, a uma taxa de 10% a.a., em 2 anos e 6 meses de aplicação?

5) Qual é o capital que, à taxa de 18% a.a., produz $ 1 485,80 em 2 anos?

6) Qual é o capital que, à taxa de 10% a.a., produz o montante de $ 7 280,45 em 25 dias?

7) Depositei certa quantia em um banco e recebi o montante de $ 6 400,00 ao fim de 40 dias. Se a aplicação foi feita à taxa de 6% a.a., quanto recebi de juros?

8) A que taxa anual um capital de $ 8 400,00, em 1 mês e 10 dias, renderia $ 3,00?

9) Qual deveria ser a taxa anual para que um capital qualquer rendesse, em 3 anos, $\frac{3}{5}$ do seu valor?

10) Em quanto tempo $ 120,00 aplicados a 15% a.a. produziriam juros de $ 80,00?

11) Apliquei $\frac{3}{7}$ do meu capital a uma taxa de 8% a.a. O restante apliquei à taxa de 10% a.a., recebendo um juro anual de $ 4 850,00. Qual era o meu capital inicial?

12) Dois capitais aplicados rendem juros iguais. O primeiro a 130% a.a., durante 8 meses; e o segundo a 90% a.a., durante 9 meses. Determine esses capitais, sabendo que a diferença entre eles é de $ 2 800,00.

13) Quero que meu capital seja aplicado a uma determinada taxa de modo que dobre em 9 meses. Para tanto, qual será a taxa que devo usar?

14) Pedi emprestada uma quantia a juros simples com taxa de 12% a.a. e tive de devolver o dobro do que usei. Por quanto tempo mantive o empréstimo?

15) A que taxa mensal um capital quintuplica em 10 anos?

16) Qual a taxa necessária para um capital duplicar em 3 anos e 4 meses?

17) O montante, após um empréstimo por 18 meses, é $\frac{8}{5}$ do capital emprestado. Qual é a taxa utilizada nesta operação?

18) Um capital ficou depositado durante 2 anos, à taxa de 4% a.a. Findo esse período, o montante foi reaplicado a 6% a.a. durante 18 meses. Determine o capital inicial, sabendo que o montante final foi de $ 17 658,00.

19) O montante de uma aplicação, após 7 meses e 15 dias, foi de $ 180 900,00. O mesmo capital, à mesma taxa e acrescido dos juros de 32 meses, dá um montante de $ 210 840,00. Determine o capital e a taxa mensal.

20) Divida $ 360,00 em duas partes, de tal forma que a primeira parte produza em 6 meses o mesmo juro que a segunda em 3 meses, ambas com a mesma taxa de aplicação.

21) Dois capitais diferem em $ 86 000,00. O maior, empregado durante 10 meses, rendeu $ 1 542,00. O menor, empregado durante 15 meses, rendeu $ 1 926,00, à mesma taxa. Quais foram os capitais empregados e qual a taxa anual?

22) Um capital de $ 29 000,00 foi dividido em duas partes. A primeira está empregada a 16% a.a. e a segunda, a 11% a.a. Determine essas partes, sabendo que a soma do rendimento anual de cada uma delas perfaz $ 4 440,00.

23) Utilizando a tabela 1, calcule os juros de $ 1 220,00, à taxa de 8% a.a., aplicados de 10 de janeiro a 9 de maio.

24) Quais os juros auferidos de 18 de novembro até 15 de março, a uma taxa de 4% a.m., sobre um capital de $ 400 000,00? (Use a tabela 1.)

25) Utilize a tabela 2 para resolver as questões a seguir.
   a) Calcule os juros produzidos por um capital de $ 3 250,00, aplicado à taxa de 105% a.a., durante 12 dias.
   b) Calcule os juros sobre um capital de $ 2 000,00, aplicado durante 80 dias, a uma taxa anual de 75%.

26) Utilize a tabela 3 para resolver as questões a seguir.
   a) Quais os juros produzidos por um capital de $ 7 200,00, aplicados durante 13 dias, a uma taxa mensal de 12%?
   b) Quais os juros que um capital de $ 8 450,00 pode render, à taxa de 11% a.m., aplicado durante 8 dias?
   c) Calcule o montante de uma aplicação de $ 1 600,00, durante 25 dias, a uma taxa mensal de 7%.

Problemas e testes de concursos

1) (BB) Certo capital, acrescido de juros de 6,5% a.a. e aplicado durante 1 ano e 4 meses, importa em $ 7 824,00. Determine o capital.

2) (BB) Um capital, com os juros correspondentes a 5 meses, eleva-se a $ 748,25. O mesmo capital, com os juros correspondentes a 8 meses, eleva-se a $ 759,20. Determine o capital.

3) (BB) Determine o capital e os juros cuja soma, ao fim de 5 meses e à taxa de 5,5% a.a., atingiu $ 17 676,00.

4) (BB) Qual é o capital que, acrescido de juros produzidos em 270 dias, à taxa de 4,5% a.a., se eleva a $ 45 071,50?

5) (BB) Uma pessoa aplicou $ 110 000,00 do seguinte modo:

- $ 68 000,00 a 5% a.a.;
- $ 42 000,00 a uma taxa desconhecida.

Sabendo que, ao fim de meio ano, a primeira importância tinha rendido $ 125,00 a mais do que a segunda, responda a que taxa esta última foi aplicada.

6) (BB) A soma de um capital com os seus juros, aplicado durante 110 dias e à taxa de 7% a.a., é igual a $ 2 553,47. Determine o valor dos juros, considerando o ano com 360 dias.

7) (BB) Determine a que taxa mensal esteve aplicado um capital de $ 48 000,00 que, em 3 meses e 20 dias, rendeu $ 440,00 de juros.

8) (BB) Certo capital, acrescido dos juros resultantes de sua aplicação durante 8 meses, eleva-se a $ 23 100,00. O mesmo capital, acrescido dos juros resultantes de 13 meses de aplicação e à mesma taxa, eleva-se a $ 23 475,00. Calcule o capital e a taxa anual.

9) (BB) Determine em quantos meses um capital de $ 32 000,00, aplicado à taxa de 12% a.a., rende $ 4 800,00 de juros simples.

10) (BB) Dois capitais de $ 11 000,00 e $ 5 000,00 estiveram aplicados durante 3 anos. Determine a que taxa esteve aplicado o segundo capital, sabendo que o primeiro, aplicado à taxa de 7% a.a., rendeu $ 1 110,00 a mais que o segundo.

11) (TRT-ES) Uma pessoa emprega seu capital nas seguintes condições: a terça parte a 15% ao ano, a quinta parte a 18% ao ano e o restante a 21% ao ano. A que taxa única essa pessoa poderia empregar todo o capital a fim de obter o mesmo rendimento anual?

12) (TTN) Uma certa importância foi aplicada a juros simples de 48% a.a., durante 60 dias. Findo o prazo, o montante apurado foi reaplicado por mais 120 dias, a uma taxa de 60% a.a., mantendo-se o mesmo regime de capitalização. Admitindo-se que o último montante foi de $ 207,36, qual foi o capital inicial da primeira operação?

13) (TRT-GO) O capital que se deve empregar à taxa de 6% a.m., a juros simples, para se obter $ 6 000,00 de juros em 4 meses será de:

a) $ 10 000,00.
b) $ 25 000,00.
c) $ 100 000,00.
d) $ 180 000,00.
e) $ 250 000,00.

14) (TTN) Uma determinada taxa foi aplicada a um capital de $ 4 000,00 durante 3 anos. Sabendo que se um capital de $ 10 000,00 fosse aplicado durante o mesmo tempo, a juros simples de 5% a.a., renderia mais $ 600,00 que o primeiro, é possível dizer que a taxa aplicada sobre o capital é de:

a) 8,0%. b) 7,5%. c) 7,1%. d) 6,9%. e) 6,2%.

15) (TRT-ES) O capital de $ 1 200 000,00 está para seus juros assim como 4 está para 3. Determine a taxa de juros, considerando que o capital esteve empregado durante 1 ano e 3 meses.

a) 6% a.m.
b) 60% a.a.
c) 5% a.a.
d) 66% a.a.
e) 50% a.a.

16) (TTN) Quanto é preciso aplicar a 12% ao mês para que se obtenha os mesmos juros simples que os produzidos por $ 400 000,00 emprestados a 15% ao mês, durante o mesmo período?

a) $ 420 000,00
b) $ 450 000,00
c) $ 480 000,00
d) $ 520 000,00
e) $ 500 000,00

17) (AP-RJ) Um imposto no valor de $ 488,00 está sendo pago com atraso de 3 meses. Se a prefeitura cobrar juros de 25% ao ano, o contribuinte terá de pagar um acréscimo de:

a) $ 30,20.
b) $ 30,30.
c) $ 30,40.
d) $ 30,50.
e) $ 30,60.

18) (TTN) Um fogão é vendido por $ 600,00 à vista ou com uma entrada de 22% e mais um pagamento de $ 542,88 após 32 dias. Qual a taxa de juros mensal envolvida na operação?

a) 5% b) 12% c) 15% d) 16% e) 20%

19) (TTN) Três capitais são aplicados a juros simples: o primeiro a 25% a.a., durante 4 anos; o segundo a 24% a.a., durante 3 anos e 6 meses; e o terceiro a 20% a.a., durante 2 anos e 4 meses. Juntos, esses capitais renderam um juro de $ 27 591,80. Sabendo que o segundo capital é o dobro do primeiro e que o terceiro é o triplo do segundo, o valor do terceiro capital é de:

a) $ 30 210,00. c) $ 15 105,00. e) $ 5 035,00.

b) $ 10 070,00. d) $ 20 140,00.

20) (AFTN) Dois capitais foram aplicados a uma taxa de 72% a.a., sob regime de juros simples. O primeiro foi aplicado pelo prazo de 4 meses e o segundo, por 5 meses. Sabendo que a soma dos juros totalizou $ 39 540,00 e que os juros do segundo capital excederam os juros do primeiro em $ 12 660,00, a soma dos dois capitais iniciais é:

a) $ 140 000,00. c) $ 145 000,00. e) $ 115 000,00.

b) $ 143 000,00. d) $ 147 000,00.

21) (AFTN) O preço à vista de uma mercadoria é de $ 100,00. O comprador pode, entretanto, pagar 20% de entrada no ato e o restante em uma única parcela de $ 100,16, vencível em 90 dias. Admitindo-se o regime de juros simples comerciais, a taxa de juros anual cobrada na venda a prazo é de:

a) 98,4% c) 100,8% e) 103,2%

b) 99,6% d) 102,0%

22) (AFTN) Um capital no valor de $ 50,00, aplicado a juros simples e à taxa de 3,6% ao mês, atinge em 20 dias um montante de:

a) $ 51,00. b) $ 51,20. c) $ 52,00. d) $ 53,60. e) $ 68,00.

23) (TTN) Se em 5 meses um capital de $ 250 000,00 rende $ 200 000,00 de juros simples à taxa de 16% ao mês, qual o tempo necessário para ganhar os mesmos juros se a taxa fosse de 160% ao ano?

a) 6 meses c) 8 meses e) 10 meses

b) 7 meses d) 9 meses

24) (TTN) Mário aplicou suas economias em um banco, a juros simples comerciais de 15% a.a., durante 2 anos. Findo o prazo, reaplicou o montante e mais $ 2 000,00 de suas novas economias, por mais 4 anos e à taxa de 20% a.a., sob o mesmo regime de capitalização. Admitindo-se que os juros das 3 aplicações somaram $ 18 216,00, o capital inicial da primeira aplicação era de:

a) $ 13 500,00.
b) $ 12 700,00.
c) $ 12 400,00.
d) $ 11 200,00.
e) $ 13 200,00.

25) (TTN) Qual é o capital que diminuído dos seus juros simples de 18 meses, à taxa de 6% a.a., se reduz a $ 8 736,00?

a) $ 9 600,00
b) $ 10 308,48
c) $ 9 522,24
d) $ 9 800,00
e) $ 9 706,66

26) (AFTN) João aplicou metade de seu capital a juros simples pelo prazo de 6 meses e o restante, nas mesmas condições, pelo período de 4 meses. Sabendo que ao final das aplicações os montantes eram de $ 117 000,00 e $ 108 000,00 respectivamente, o capital inicial de João era de:

a) $ 150 000,00.
b) $ 160 000,00.
c) $ 170 000,00.
d) $ 180 000,00.
e) $ 200 000,00.

CAPÍTULO 7

DESCONTOS SIMPLES

1. Introdução

Ao contrair uma dívida a ser paga no futuro, é muito comum o devedor oferecer ao credor um documento denominado *título*, que é o comprovante dessa operação.

De posse do título, que é usado para formalizar uma dívida que não será paga imediatamente, mas dentro de um prazo estipulado, o credor poderá negociar a antecipação de seu pagamento através de um banco. Vamos tratar, neste capítulo, desse tipo de operação bancária.

2. Títulos

Há três tipos de títulos bastante usados: nota promissória, duplicata e letra de câmbio.

REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL
Vencimento em 01 de março de 1998
Nº 3906/7
R$ 100 000,00
A Marcelo dos Santos
pagarei por esta única via de Nota Promissória
CPF
CGC Nº
a
ou a sua ordem a quantia de cem mil reais -x-x-x-

ponde a uma promessa de pagamento em que é especificado o valor nominal ou quantia a ser paga (que é a dívida inicial, normalmente acrescida de juros), a data de vencimento do título (em que a dívida deve ser paga), o nome e a assinatura do devedor, o nome do credor e da pessoa que deverá receber a importância a ser paga.

Duplicata — É usada por pessoa jurídica contra um cliente (que pode ser pessoa física ou jurídica) para o qual vendeu mercadorias a prazo ou prestou serviços a serem pagos no futuro (segundo contrato). Na duplicata deve constar o aceite do cliente, o valor nominal, a data de vencimento, o nome de quem deverá pagar e o nome da pessoa a quem deverá pagar. Uma duplicata só é legal se for elaborada tendo por base a nota fiscal.

DATA DA EMISSÃO	Nº DA NOTA FISCAL	VALOR R$	DATA DA EMISSÃO	Nº DA NOTA FISCAL	VALOR R$	FATURA Nº
21/08/97	20743	R$ 686,00				
			TOTAL ... R$		686,00	424700

editora ática s.a.

MATRIZ: RUA BARÃO DE IGUAPE - 110
TEL. - 278-9322 FAX - 277-4146
CEP - 01507-900 - SÃO PAULO - SP

R BARAO DE IGUAPE , 110 LIBERDADE
CEP. 01507-900 SAO PAULO - SP
INSC.CGC.(M.F.) N. 61.259.958/0001
INSC. ESTADUAL N. 105375350110
FONE: (011) 2789322 PABX
FAX: (011) 2774146
DATA DA EMISSÃO 22 DE AGOSTO DE 1997

FATURA Nº	FATURA/DUPLICATA VALOR R$	DUPLICATA Nº DE ORDEM	VENCIMENTO
424706	R$ 686,00	424700/01	22/08/1997

PARA USO DA INSTITUIÇÃO FINANCEIRA

DESCONTO DE ATÉ

CONDIÇÕES ESPECIAIS

DESTINATÁRIO

RAZÃO SOCIAL ICAMI TIBA
ENDEREÇO R DONA ELISA PEREIRA DE BARROS, 418 CEP 01456-000
MUNICÍPIO SAO PAULO ESTADO SP
PRAÇA PAGAMENTO SAO PAULO BAIRRO JD PAULISTANO
END. COBRANÇA
END. FATURAMENTO
C.G.C.(M.F.) Nº 205.774.608/0000 INSCR. ESTADUAL Nº

VALOR POR EXTENSO SEISCENTOS E OITENTA E SEIS REAIS**********

RECONHEÇO(EMOS) A EXATIDÃO DESTA **DUPLICATA DE VENDA MERCANTIL**, NA IMPORTÂNCIA ACIMA, QUE PAGAREI(EMOS) À **EDITORA ÁTICA S.A.**, OU SUA ORDEM, NA PRAÇA E VENCIMENTO(S) INDICADOS.

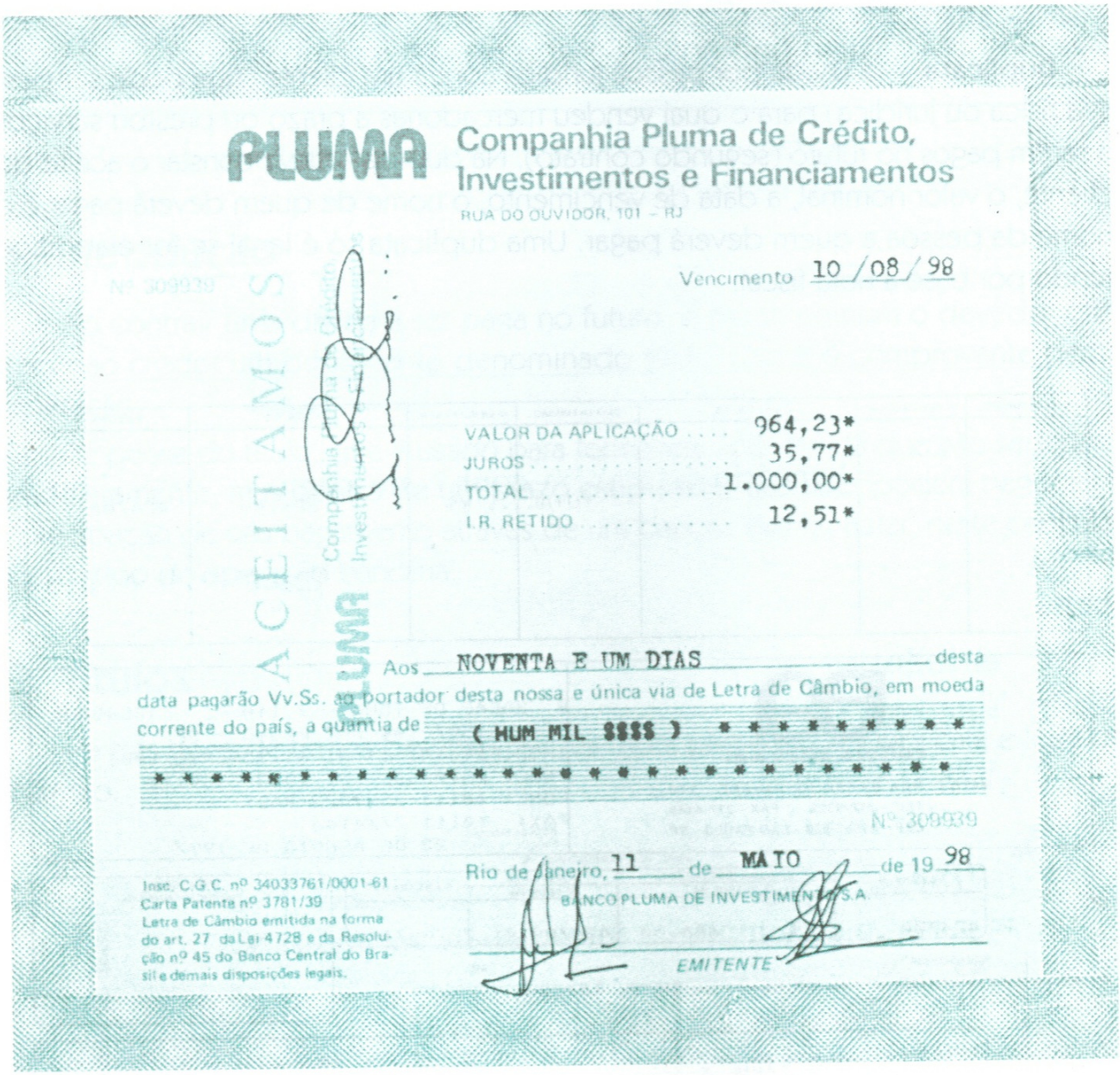
EM ____/____/____ _____
DATA DO ACEITE ASSINATURA DO SACADO

NA FALTA DE PAGAMENTO NO VENCIMENTO INDICADO, SERÃO COBRADOS JUROS DE 1% A.M. MAIS DESPESAS BANCÁRIAS.

EDITORA ÁTICA S.A.

ASSINATURA DO EMITENTE

Letra de câmbio — É um título ao portador, emitido por uma financeira em operações de crédito direto para pessoas físicas ou jurídicas. Uma letra de câmbio tem especificados: o valor de resgate (que é o valor nominal acrescido de juros), a data de vencimento do título e quem deve pagar.



PLUMA Companhia Pluma de Crédito, Investimentos e Financiamentos

RUA DO OUVIDOR, 101 - RJ

Vencimento 10 / 08 / 98

ACEITAMOS

VALOR DA APLICAÇÃO	964,23*
JUROS	35,77*
TOTAL	1.000,00*
I.R. RETIDO	12,51*

Aos NOVENTA E UM DIAS desta data pagarão Vv.Ss. ao portador desta nossa e única via de Letra de Câmbio, em moeda corrente do país, a quantia de (HUM MIL $$$$) * * *

cluem-se os juros pela postergação do pagamento, podemos aceitar o fato de que o adiantamento do mesmo também deverá vir acompanhado de juros, mas agora no sentido contrário, ou seja, descontados do valor nominal.

Supondo uma taxa de 1,4% a.m. para o desconto, em dois meses de adiantamento teremos sobre os R$ 100 000,00 o seguinte cálculo:

Desconto = 100 000,00 · 0,014 · 2

Desconto = 2 800

Marcelo dos Santos deverá receber, então:

R$ 100 000,00 − R$ 2 800,00 = R$ 97 200,00

Assim, podemos chamar de desconto de título ao abatimento dado sobre o valor nominal, pela antecipação do pagamento.

> O *desconto bancário* é aquele em que a taxa de desconto incide sobre o valor nominal.

O desconto bancário é também conhecido como *comercial* ou *por fora*.

As fórmulas que utilizaremos para calcular o desconto bancário são bem semelhantes às de juros simples.

Assim, temos:

D = desconto

N = valor nominal

L = valor líquido recebido após o desconto

i = taxa

n = período de tempo

$$D = N \cdot i \cdot n$$

Ou:

$$L = N - N \cdot i \cdot n$$

Então:

$$L = N \cdot (1 - in)$$

Exercícios resolvidos

1) Qual o desconto que deverá incidir sobre um título de $ 750,00, pago 2 meses e 10 dias antes do vencimento, com uma taxa de 5% a.m.?

Solução

$N = 750$, $n = 2$ meses e 10 dias $= 70$ dias, $i = 0{,}05$

$$D = N \cdot i \cdot n \Rightarrow D = 750 \cdot \frac{0{,}05}{30} \cdot 70 = 87{,}50$$

Resposta: O desconto deverá ser de $ 87,50.

2) Um título no valor de $ 1 200,00, pago 5 meses antes do vencimento, ficou reduzido a $ 900,00. Qual foi a taxa mensal utilizada?

Solução

$N = 1\,200$, $n = 5$ meses, $L = 900$

Este problema pode ser resolvido de dois modos.

Primeiro modo: usando o cálculo de desconto.

$D = N \cdot i \cdot n$

$D = N - L = 1\,200 - 900 = 300$

$$300 = 1\,200 \cdot 5 \cdot i \Rightarrow i = \frac{300}{1\,200 \cdot 5} = 0{,}05$$

Segundo modo: usando a fórmula do valor líquido.

$L = N \cdot (1 - in)$

$$900 = 1\,200 \cdot (1 - i \cdot 5) \Rightarrow \frac{900}{1\,200} = 1 - 5i \Rightarrow 5i = 1 - \frac{900}{1\,200} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5i = \frac{300}{1\,200} \Rightarrow i = \frac{300}{6\,000} = 0{,}05 \text{ ou } 5\% \text{ a.m.}$$

Resposta: A taxa mensal utilizada para o cálculo foi de 5%.

3) Resgatei, em 16 de abril, uma nota promissória com vencimento marcado para 10 de junho do mesmo ano. Obtive um desconto de $ 4 400,00, calculado com uma taxa mensal de 6%. Qual era o valor nominal da promissória?

Solução

$D = 4\,400$, $i = 0{,}06$

Consultando a tabela 1 do final do livro, obtemos a informação:

$161 - 106 = 55 = n$

$D = N \cdot i \cdot n$

$$4\,400 = N \cdot \frac{0{,}06}{30} \cdot 55 \Rightarrow N = \frac{4\,400 \cdot 30}{0{,}06 \cdot 55} \Rightarrow N = 40\,000$$

Resposta: O valor nominal da promissória era de $ 40 000,00.

4. Desconto racional

O desconto racional é também conhecido como desconto *por dentro*.

Trata-se, nesse caso, de usar uma taxa sobre um valor não conhecido, situação semelhante à analisada em lucros sobre a venda.

> O *desconto racional* ($\mathbf{D_r}$) é aquele em que a taxa de desconto incide sobre o valor líquido.

O desconto racional calculado sobre o líquido é dado por:

$D_r = L \cdot i \cdot n$

Mas lembre-se de que:

$L + D_r = N$

Assim, podemos calcular o líquido da seguinte maneira:

$L + L \cdot i \cdot n = N$

$L (1 + i \cdot n) = N$

$$L = \frac{N}{1 + in}$$

No caso de querermos o desconto diretamente, é preciso substituir **L** por $\frac{N}{1 + in}$ na expressão $D_r = L \cdot i \cdot n$. Daí, teremos:

$$D_r = L \cdot i \cdot n = \frac{N}{1 + in} \cdot i \cdot n$$

$$D_r = \frac{N \cdot i \cdot n}{1 + in}$$

Exercícios resolvidos

4) Calcular o desconto por dentro de um título de $ 6 864,00, a uma taxa de 12% ao mês, pago 1 mês e 6 dias antes do vencimento.

Solução

$N = 6\,864$, $i = 0{,}12$, $n = 1$ mês e 6 dias $= 36$ dias

$$L = \frac{N}{1 + in} = \frac{6\,864}{1 + \frac{0{,}12}{30} \cdot 36} \Rightarrow L = \frac{6\,864}{1 + 0{,}144} = 6\,000$$

Calculando o desconto:

$ 6 864,00 − $ 6 000,00 = $ 864,00

Aplicando diretamente a fórmula do desconto, também é possível resolver esse problema.

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in} = \frac{6\,864 \cdot \frac{0{,}12}{30} \cdot 36}{1 + \frac{0{,}12}{30} \cdot 36} \Rightarrow D_r = \$\ 864{,}00$$

Resposta: O desconto foi de $ 864,00.

5) Um título com valor nominal de $ 2 000,00, a uma taxa de 3% ao mês, vai ser descontado 8 meses antes do vencimento. Calcular a diferença entre os descontos bancário e racional.

Solução

Desconto bancário

$D = N \cdot i \cdot n \Rightarrow D = 2\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 8 \Rightarrow D = 480{,}00$

Desconto racional

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in} \Rightarrow D_r = \frac{2\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 8}{1 + 0{,}03 \cdot 8} \Rightarrow D_r \cong 387{,}10$$

Diferença: $D - D_r = 92{,}90$

Por esse problema, percebe-se que o desconto bancário não é apropriado para prazos muito longos.

Resposta: A diferença é de $ 92,90.

6) Calcular a taxa a ser aplicada, num desconto por dentro, em uma duplicata de $ 1 200,00, de modo que dois meses e meio antes do vencimento ela se reduza a $ 1 000,00.

Solução

$N = 1\,200$, $L = 1\,000$, $n = 2{,}5$ meses

$$L = \frac{N}{1 + in} \Rightarrow 1\,000 = \frac{1\,200}{1 + i \cdot 2{,}5} \Rightarrow 1\,000(1 + 2{,}5i) = 1\,200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2{,}5i = \frac{1\,200}{1\,000} \Rightarrow 1 + 2{,}5i = 1{,}2 \Rightarrow 2{,}5\,i = 1{,}2 - 1 \Rightarrow i = \frac{0{,}2}{2{,}5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = 0{,}08$$

Resposta: A taxa deve ser de 8% a.m.

Exercícios propostos

1) Determine o desconto bancário sofrido por uma promissória de $ 1 000,00, a uma taxa de 8% a.m., 3 meses antes do seu vencimento.

2) Calcule a taxa anual aplicada sobre uma duplicata de $ 3 000,00 de modo que haja um desconto por fora de $ 600,00, num período de 6 meses.

3) Em que prazo um título descontado por fora de $ 2 500,00, a uma taxa de 6% a.m., dá $ 600,00 de desconto?

4) Encontre o valor nominal de um título que, descontado por fora e três meses e meio antes do seu vencimento, a uma taxa de 4% a.m., teve um desconto de $ 28 000,00.

5) Um título que deveria vencer em 15 de agosto foi descontado por fora em 13 de junho precedente, a uma taxa de 6% a.m. Se o valor nominal do título era de $ 3 600,00, qual ficou sendo o seu valor atual?

6) Tendo sido descontado por fora 3 meses antes de seu vencimento, um título de $ 1 800,00 foi reduzido a $ 1 200,00. Qual foi a taxa mensal de desconto aplicada?

7) A que taxa anual uma nota promissória de $ 420,00, em um mês e meio, dá $ 5,25 de desconto por fora?

8) Determine o desconto por fora sofrido por uma letra de câmbio de $ 2 400,00, a uma taxa de 4,5% a.m., 6 meses antes de seu vencimento.

9) Determine o valor nominal de uma letra de câmbio que, descontada por fora 3 meses e 10 dias antes de seu vencimento, a uma taxa de 10% a.m., produziu um desconto de $ 400,00.

10) Uma letra de câmbio a ser paga em 19 de agosto, descontada por fora à taxa de 12% a.m. no dia 3 de maio precedente, produziu $ 20 726,00 de valor líquido. Qual é o valor nominal dessa letra?

11) Determine o desconto por dentro sofrido por uma letra de $ 1 000,00, descontada a uma taxa de 3% a.m., 6 meses antes de seu vencimento.

12) Uma letra de $ 900,00, descontada por dentro 20 dias antes de seu vencimento, sofreu um desconto de $ 100,00. Qual foi a taxa mensal utilizada nessa operação?

13) Determine o valor líquido produzido por uma letra que, descontada por dentro 60 dias antes de seu vencimento, à taxa de 9% a.m., produziu $ 140,00 de desconto.

14) Uma pessoa vai a um banco e desconta por fora uma nota promissória 85 dias antes de seu vencimento, à taxa de 6% a.m. Sabendo que o líquido para a pessoa foi de $ 1 992,00, calcule o valor da promissória.

15) Determine a diferença entre os descontos por fora e por dentro de uma nota promissória de $ 2 000,00, quando descontada 1 mês e 10 dias antes de seu vencimento, a uma taxa mensal de 9%.

16) Calcule o desconto por dentro de uma letra com vencimento para daqui a 8 anos, no valor nominal de $ 1 000,00, se descontada hoje a uma taxa anual de 20%. O valor encontrado é razoável? Repita o cálculo, verificando o desconto por fora.

17) Duas letras de câmbio, uma de $ 15 000,00, pagável em 6 meses, e outra de $ 14 700,00, pagável em 30 dias, foram apresentadas a desconto por fora, recebendo o portador da primeira $ 313,75 a mais do que o portador da segunda. Qual foi a taxa anual usada nas operações?

5. Prazo médio

Um banco deseja resgatar três títulos de $ 10 000,00 cada um, de um mesmo devedor, todos a uma mesma taxa de 6% a.m. e com vencimentos para 30, 60 e 90 dias.

Caso seja do interesse do banco e do devedor, esses três títulos poderão ser substituídos por um único que não cause ônus a nenhuma das partes.

Esse título único terá que, num determinado prazo e à mesma taxa, oferecer o mesmo desconto que a soma dos descontos produzidos pelos três títulos.

Esse prazo é chamado de *prazo médio*.

Veremos agora como se faz para encontrar o prazo médio referente à operação acima.

Em primeiro lugar, faremos o cálculo dos descontos em separado:

Tempo	Desconto
30 dias = 1 mês	$10\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 1$
60 dias = 2 meses	$10\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 2$
90 dias = 3 meses	$10\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 3$

Lembre-se: $D = N \cdot i \cdot n$, para o desconto bancário.

Assim, o desconto total será de:

$$D = 10\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 1 + 10\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 2 + 10\,000 \cdot 0{,}06 \cdot 3$$

$$D = 10\,000 \cdot 0{,}06\,(1 + 2 + 3) = 3\,600$$

Em seguida, vamos encontrar o tempo **T** necessário para produzir no total dos três títulos, à mesma taxa, o mesmo desconto.

$$D = 30\,000 \cdot 0{,}06 \cdot T = 1\,800T$$

Comparando os descontos, vem:

$$3\,600 = 1\,800T \Rightarrow \frac{3\,600}{1\,800} = T \Rightarrow T = 2 \text{ meses}$$

Deste modo, um título único de $ 30 000,00 produzirá em 2 meses, à mesma taxa de 6%, o mesmo desconto que a soma dos descontos dos três títulos.

Como se pode perceber, o prazo médio T = 2 meses foi obtido através da média aritmética dos prazos dos três títulos. Generalizando:

> Quando os valores nominais forem iguais e as taxas também, o *prazo médio* será a *média aritmética* dos prazos.

Um segundo problema seria determinar o prazo médio no caso de termos taxas iguais, mas valores nominais diferentes.

Vamos fazer o cálculo desse prazo para três títulos, nas seguintes condições:

Título	**Nominal** ($)	**Taxa**	**Vencimento** (dias)
1	1 000,00	10% a.m.	40
2	2 000,00	10% a.m.	50
3	3 000,00	10% a.m.	60

Inicialmente, devemos fazer o cálculo dos descontos individuais:

Título	**Desconto**
1	$1\,000 \cdot \frac{0,1}{30} \cdot 40$
2	$2\,000 \cdot \frac{0,1}{30} \cdot 50$
3	$3\,000 \cdot \frac{0,1}{30} \cdot 60$

Lembre-se: $D = N \cdot i \cdot n$.

O desconto será, portanto:

$$D = 1\,000 \cdot \frac{0,1}{30} \cdot 40 + 2\,000 \cdot \frac{0,1}{30} \cdot 50 + 3\,000 \cdot \frac{0,1}{30} \cdot 60$$

$$D = \frac{0,1}{30}(1\,000 \cdot 40 + 2\,000 \cdot 50 + 3\,000 \cdot 60)$$

Agora vamos calcular o desconto produzido num título único, à mesma taxa e num prazo **T**, no valor que é a soma dos valores nominais de cada um dos três outros títulos.

$$D = (1\,000 + 2\,000 + 3\,000) \cdot \frac{0,1}{30} \cdot T$$

Comparando os dois cálculos dos descontos, vem:

$$(1\,000 + 2\,000 + 3\,000) \cdot \frac{0,1}{30} \cdot T = \frac{0,1}{30}(1\,000 \cdot 40 + 2\,000 \cdot 50 + 3\,000 \cdot 60)$$

$$T = \frac{1\,000 \cdot 40 + 2\,000 \cdot 50 + 3\,000 \cdot 60}{1\,000 + 2\,000 + 3\,000} = 53 \text{ dias (aproximadamente)}$$

O prazo médio seria, nessa situação, 53 dias. Perceba que ele foi obtido calculando a média ponderada dos três prazos e utilizando os respectivos valores nominais como pesos. Generalizando:

> Quando os valores nominais forem diferentes e as taxas iguais, o *prazo médio* será a *média ponderada* dos prazos, com os respectivos valores nominais como pesos.

Exercícios resolvidos

7) Tenho três letras de câmbio iguais de $ 480,00, a prazos de 20, 25 e 35 dias, respectivamente. Como a taxa de desconto é de 1,2% a.m., qual é o prazo médio de vencimento das três letras?

Solução

Como temos o mesmo valor nominal e a mesma taxa para as três letras, podemos considerar o prazo médio como a média aritmética dos três prazos. Assim:

$$T = \frac{20 + 25 + 35}{3} = \frac{80}{3} \text{ dias}$$

Ou aproximadamente 27 dias.

Para verificar a validade dessa resposta, lembre-se de que $D = N \cdot i \cdot n$ e $i = 0{,}012$. Observe:

Tempo (dias)	**Desconto** ($)
20	$480 \cdot \frac{20}{30} \cdot 0{,}012 = \frac{115{,}2}{30} = 3{,}84$
25	$480 \cdot \frac{25}{30} \cdot 0{,}012 = \frac{144}{30} = 4{,}80$
35	$480 \cdot \frac{35}{30} \cdot 0{,}012 = \frac{201{,}6}{30} = 6{,}72$

Então:

desconto total $= 3{,}84 + 4{,}80 + 6{,}72 = 15{,}36$ ou $ 15,36.

Considerando $N = 3 \cdot \$\ 480{,}00 = \$\ 1\,440{,}00$, vamos determinar **D** utilizando o prazo médio calculado:

$$D = 1\,440 \cdot \frac{0{,}012}{30} \cdot T$$

Nessa expressão, $T = \frac{80}{3}$ (prazo médio calculado).

Dessa forma, temos:

$$D = 1\,440 \cdot \frac{0{,}012}{30} \cdot \frac{80}{3} = \frac{1\,382{,}40}{90} = 15{,}36$$

Portanto, o prazo médio está correto.

Resposta: O prazo médio é de 27 dias.

8) Uma pessoa tinha três títulos a receber: um de $ 250,00 com prazo de 20 dias, outro de $ 350,00 com prazo de 40 dias e outro de $ 400,00 com prazo de 25 dias. A taxa era de 8% a.m., para todos os títulos. Qual seria o tempo em que a soma desses valores nominais, à mesma taxa, daria os mesmos descontos?

Solução

Havendo uma variação dos valores nominais e dos prazos, à mesma taxa, sabemos que o prazo médio deverá ser calculado com o uso da média ponderada.

Assim:

$$T = \frac{250 \cdot 20 + 350 \cdot 40 + 400 \cdot 25}{250 + 350 + 400} = \frac{5\,000 + 14\,000 + 10\,000}{1\,000} = 29$$

O prazo médio é de 29 dias.

Para fazer a verificação, lembre-se de que i = 0,08. Observe:

Tempo (dias)	**Desconto** ($)
20	$250 \cdot \frac{20}{30} \cdot 0{,}08 = \frac{400}{30}$
40	$350 \cdot \frac{40}{30} \cdot 0{,}08 = \frac{1\,120}{30}$
25	$400 \cdot \frac{25}{30} \cdot 0{,}08 = \frac{800}{30}$

Então:

$$\frac{400}{30} + \frac{1\,120}{30} + \frac{800}{30} = \frac{2\,320}{30}$$

Ou, aproximadamente:

$ 77,33.

Considerando N = 250 + 350 + 400 = 1 000 ou N = $ 1 000,00, vamos determinar o desconto com o prazo médio calculado anteriormente.

$$D = 1\,000 \cdot \frac{0{,}08}{30} \cdot T$$

Nessa expressão, T = 29 (que é o prazo médio).

$$D = 1\,000 \cdot \frac{0{,}08}{30} \cdot 29 = \frac{2\,320}{30}$$ ou $ 77,33, aproximadamente.

Portanto, está correto o prazo médio.

Resposta: O prazo médio é de 29 dias.

6. Taxa média

O problema agora é substituir vários títulos, com taxas diferentes, por um único que não cause ao credor ou ao devedor nenhum ônus quando for descontado.

Vamos estudar três desses casos, procurando sempre encontrar uma taxa média.

Primeiro caso: *valores nominais e prazos iguais*

Título	**Taxa** (a.m.)	**Valor nominal** ($)	**Prazo** (meses)	**Desconto** ($)
1	2%	1 000	4	1 000 · 0,02 · 4
2	3%	1 000	4	1 000 · 0,03 · 4

O desconto total será:

$$D = 1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 4 + 1\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 4$$

$$D = 1\,000 \cdot 4 \cdot (0{,}02 + 0{,}03)$$

Calculando agora o desconto sobre um título único, no mesmo prazo, temos:

$$D = 2\,000 \cdot i \cdot 4$$

Comparando os dois descontos, obtemos:

$$2\,000 \cdot i \cdot 4 = 1\,000 \cdot 4 \cdot (0{,}02 + 0{,}03)$$

$$i = \frac{1\,000 \cdot 4 \cdot (0{,}02 + 0{,}03)}{2\,000 \cdot 4}$$

$$i = \frac{0{,}02 + 0{,}03}{2} = 0{,}025$$

A taxa média será, portanto, a média aritmética das taxas dos dois títulos.

> Quando os valores nominais e os prazos forem iguais, a *taxa média* será a *média aritmética* das taxas.

Segundo caso: *valores nominais diferentes e prazos iguais*

Título	**Taxa** (a.m.)	**Valor nominal** ($)	**Prazo** (meses)	**Desconto** ($)
1	2%	1 000	4	$1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 4$
2	3%	2 000	4	$2\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 4$

O desconto total será:

$$D = 1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 4 + 2\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 4$$

Agora, calcularemos o desconto sobre um título único, no mesmo prazo e a uma taxa média **i**.

$$D = (1\,000 + 2\,000) \cdot i \cdot 4$$

Comparando os dois descontos:

$$(1\,000 + 2\,000) \cdot i \cdot 4 = 1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 4 + 2\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 4$$

$$i = \frac{(1\,000 \cdot 0{,}02 + 2\,000 \cdot 0{,}03)\cancel{4}}{(1\,000 + 2\,000)\cancel{4}}$$

$$i = \frac{1\,000 \cdot 0{,}02 + 2\,000 \cdot 0{,}03}{1\,000 + 2\,000} = 0{,}0266$$

A taxa média i = 0,0267, ou aproximadamente 2,67% a.m., foi obtida calculando-se a média ponderada das taxas e utilizando os respectivos valores nominais como pesos. Generalizando:

> Quando os valores nominais forem diferentes mas os prazos iguais, a *taxa média* será a *média ponderada* das taxas, utilizando-se os respectivos valores nominais como pesos.

Terceiro caso: *valores nominais diferentes e prazos diferentes*

Título	**Taxa** (a.m.)	**Valor nominal** ($)	**Prazo** (meses)	**Desconto** ($)
1	3%	1 200	2	1 200 · 2 · 0,03
2	5%	1 500	4	1 500 · 4 · 0,05

O desconto total será:

$$D = 1\,200 \cdot 2 \cdot 0{,}03 + 1\,500 \cdot 4 \cdot 0{,}05$$

Calculando o desconto sobre um título único, no mesmo prazo e com uma só taxa **i**, obtemos:

$$D = 1\,200 \cdot 2 \cdot i + 1\,500 \cdot 4 \cdot i = (1\,200 \cdot 2 + 1\,500 \cdot 4)\, i$$

Comparando os dois descontos:

$$1\,200 \cdot 2 \cdot 0{,}03 + 1\,500 \cdot 4 \cdot 0{,}05 = (1\,200 \cdot 2 + 1\,500 \cdot 4)\, i$$

$$i = \frac{1\,200 \cdot 2 \cdot 0{,}03 + 1\,500 \cdot 4 \cdot 0{,}05}{1\,200 \cdot 2 + 1\,500 \cdot 4} = \frac{372}{8\,400} \Rightarrow i \cong 0{,}0443$$

O valor da taxa média (0,0443 ou 4,43% a.m.) foi obtido calculando-se a média ponderada das taxas e utilizando-se o produto dos valores nominais pelos respectivos prazos como pesos. Generalizando:

> Quando os valores nominais e os prazos forem diferentes, a *taxa média* será a *média ponderada* das taxas, utilizando-se como pesos os respectivos produtos dos valores nominais pelos prazos.

Observação importante: Taxas e prazos médios poderão ser calculados não só em descontos, mas também em juros.

Exercícios resolvidos

9) Dois capitais iguais de $ 800,00 foram colocados a render juros durante três meses, à taxa de 10% a.m. e 12% a.m. Qual é a taxa média de juros?

Solução

Como se trata de capitais iguais, colocados a render juros no mesmo prazo, a taxa média poderá ser calculada pela média aritmética das taxas.

Assim:

$$i = \frac{0{,}10 + 0{,}12}{2} = 0{,}11 \text{ ou } 11\% \text{ a.m.}$$

Vamos fazer a verificação:

Capital ($)	**Taxa** (a.m.)	**Prazo** (meses)	**Juros** ($)
800	10%	3	$800 \cdot 0{,}1 \cdot 3 = 240$
800	12%	3	$800 \cdot 0{,}12 \cdot 3 = 288$

Juro total = 240 + 288 = 528 ou $ 528,00

Calculando o juro com a taxa média obtida, temos:

$J = 2 \cdot 800 \cdot 3 \cdot 0{,}11 = 528$ ou $ 528,00

Portanto, a taxa média está correta.

Resposta: A taxa média é de 11% a.m.

10) Três capitais iguais a $ 1 200,00 são colocados a render juros. O primeiro a 4% a.m., durante 2 meses; o segundo a 6% a.m., durante 3 meses e o terceiro, a 8% a.m., durante 4 meses. Calcular a taxa média de juros.

Solução

Como se trata de um mesmo capital, com prazos variáveis, a taxa média deverá ser calculada pela média ponderada das taxas, utilizando-se os prazos como pesos.

Assim:

$$i = \frac{0{,}04 \cdot 2 + 0{,}06 \cdot 3 + 0{,}08 \cdot 4}{2 + 3 + 4} = \frac{0{,}58}{9} = 0{,}064$$

Então, a taxa média será de 0,064 ou 6,4% a.m., aproximadamente.

Vamos fazer a verificação:

Capital ($)	**Taxa** (a.m.)	**Prazo** (meses)	**Juros** ($)
1 200	4%	2	1 200 · 0,04 · 2 = 96
1 200	6%	3	1 200 · 0,06 · 3 = 216
1 200	8%	4	1 200 · 0,08 · 4 = 384

Juro total = 96 + 216 + 384 = 696 ou $ 696,00

Calculando o juro com a taxa média obtida, temos:

$J = 1\,200 \cdot i \cdot 2 + 1\,200 \cdot i \cdot 3 + 1\,200 \cdot i \cdot 4 =$

$= 1\,200 \cdot i \cdot (2 + 3 + 4) = 1\,200 \cdot i \cdot 9$

Como $i = \frac{0,58}{9}$, vem:

$J = 1\,200 \cdot \frac{0,58}{9} \cdot 9 = 696$ ou $ 696,00, o que confirma o valor da taxa média.

Resposta: A taxa média é de 6,4% a.m., aproximadamente.

11) Tenho três títulos a resgatar: um de $ 6 000,00, com prazo de vencimento de 3 meses à taxa de 10% a.m.; um outro de $ 5 000,00, com prazo de 4 meses à taxa de 15% a.m. e um último de $ 8 000,00, com prazo de 3 meses a 12% a.m. Qual será a taxa média para os descontos?

Solução

Como temos valores nominais diferentes e prazos diferentes, é preciso calcular a taxa média, utilizando a média ponderada das taxas. Para tanto, os pesos devem ser determinados pelo produto dos valores nominais pelos respectivos prazos. Assim:

$$i = \frac{6\,000 \cdot 3 \cdot 0,1 + 5\,000 \cdot 4 \cdot 0,15 + 8\,000 \cdot 3 \cdot 0,12}{6\,000 \cdot 3 + 5\,000 \cdot 4 + 8\,000 \cdot 3} =$$

$$= \frac{1\,800 + 3\,000 + 2\,880}{18\,000 + 20\,000 + 24\,000} = \frac{7\,680}{62\,000} \cong 0,1239 \text{ ou } 12,39\% \text{ a.m.}$$

Resposta: A taxa média dos descontos será de 12,39% a.m.

Deixaremos a verificação como exercício para você resolver.

Exercícios propostos

18) Devo $ 60 000,00. Tenho de pagar a metade desse valor à vista, a terça parte em 6 meses e o restante em 1 ano. Em que prazo poderei liquidar a dívida toda?

19) Qual o prazo médio de três letras de $ 200,00 cada uma, emitidas a 60 dias, 120 dias e 180 dias de prazo, à taxa de 5% a.m.?

20) Tenho cinco letras de $ 500,00 cada uma, para pagar em prazos de 60, 80, 25, 60 e 50 dias, à taxa comum de 10% a.m. O credor propôs trocar as cinco letras por um único título de $ 2 500,00 num prazo de 45 dias. O prazo proposto é conveniente, comparado com o prazo médio das cinco letras que tenho?

21) Determine o prazo médio das seguintes letras de câmbio: $ 200,00 a 30 dias, $ 120,00 a 45 dias e $ 400,00 a 60 dias, numa taxa comum de 5% a.m.

22) Qual a data de vencimento de uma letra destinada a substituir, em 6 de junho, duas letras: uma de $ 1 000,00, com vencimento em 3 de agosto, e outra de $ 600,00, com vencimento em 15 de julho do mesmo ano, à taxa de 15% a.m.?

23) Uma letra de $ 50 000,00 vence em 30 dias, e outra, de $ 75 000,00, vence num prazo desconhecido. Sabendo que o prazo médio dessas letras é de 32 dias, qual será o prazo da segunda letra?

24) Determine a taxa média de três letras de $ 1 000,00 cada uma, às taxas de 5% a.a., 6% a.a. e 7% a.a., sabendo que todas possuem um prazo de três meses.

25) Temos duas letras de câmbio. Uma de $ 2 000,00 e outra de $ 2 500,00, às taxas de 5% a.m. e 4% a.m., respectivamente. Calcule a taxa média dessas letras, sabendo que há entre elas um prazo de 20 dias.

26) Calcule a taxa média das seguintes letras de câmbio:
- valor nominal de $ 400,00, com vencimento em 50 dias e à taxa de 6% a.m.;
- valor nominal de $ 200,00, com vencimento em 30 dias e à taxa de 3% a.m.;
- valor nominal de $ 300,00, com vencimento em 45 dias e à taxa de 5% a.m.

27) Qual a taxa média de quatro letras de $ 1 200,00 cada uma, às taxas de 3% a.m., 4% a.m., 5% a.m. e 6% a.m., todas durante 25 dias?

28) Determine a taxa média das seguintes letras: $ 500,00 à taxa de 12% a.m., $ 600,00 à de 8% a.m. e $ 2 000,00 à de 6% a.m., todas no prazo de 40 dias.

29) Emprestei uma quantia à taxa de 12% a.a. Depois de 10 meses, baixei a taxa para 8% a.a. e, após 6 meses, recebi $ 12 500,00 de capital e juros. Utilizando a taxa média, qual foi o capital emprestado?

30) Tenho três letras de $ 6 000,00, $ 8 000,00 e $ 5 000,00, emitidas em prazos de 40 dias, 15 dias e 20 dias, respectivamente. Sabendo que a primeira e a segunda letra estão às taxas de 8% e 10% a.m., respectivamente, sob uma taxa média de 10% a.m., qual a taxa da terceira letra?

Problemas e testes de concursos

1) (TTN) Admita-se que uma duplicata tenha sido submetida a dois tipos de descontos. No primeiro caso, a juros simples e à taxa de 10% a.a., com vencimento em 180 dias e desconto comercial (por fora). No segundo caso, com desconto racional (por dentro), mantendo as demais condições. Sabendo que a soma dos descontos, por fora e por dentro, foi de $ 635,50, assinale qual era o valor nominal do título.

a) 6 590,00 c) 6 240,00 e) 6 430,00
b) 5 970,00 d) 6 510,00

2) (TTN) José descontou duas duplicatas em um banco, no regime de juros simples comerciais e à taxa de 15% a.a. O primeiro título vencia em 270 dias e o segundo, em 160 dias, sendo seu valor nominal 50% superior ao primeiro. Sabendo que os dois descontos somaram o valor de $ 382,50, o título que produziu o maior desconto tinha valor nominal de:

a) 1 700,00. c) 1 850,00. e) 1 800,00.
b) 1 900,00. d) 1 750,00.

3) (TTN) Um negociante tem duas dívidas a pagar, uma de $ 3 000,00, com 45 dias de prazo, e outra de $ 8 400,00, pagável em 60 dias. O negociante quer substituir essas duas dívidas por uma única, com 30 dias de prazo. Sabendo que a taxa de desconto comercial é de 12% a.a., o valor nominal dessa dívida será de:

a) 11 300,00. c) 9 332,00. e) 8 445,00.
b) 8 232,00. d) 11 187,00.

4) (AFTN) Para refinanciar uma dívida de $ 1 500 000,00 em 36 dias, o devedor pagou $ 148 000,00, tendo recebido um novo título no valor de $ 1 400 000,00 para o prazo de 90 dias. Considerando o instante 0 como data de referência e

uma taxa de juros simples, assinale nas alternativas a taxa de desconto comercial adotada nessa operação.

a) 25% a.a.
b) 26% a.a.
c) 20% a.a.
d) 30% a.a.
e) 24% a.a.

5) (AFTN) Uma empresa descontou uma duplicata a uma taxa de 84% a.a. e desconto comercial simples. O valor do desconto foi de $ 10 164,00. Se na operação fosse adotado o desconto racional simples, o valor do desconto seria reduzido em $ 1 764,00. Nessas condições, o valor nominal da duplicata é de:

a) $ 45 000,00.
b) $ 46 700,00.
c) $ 47 300,00.
d) $ 48 400,00.
e) $ 50 000,00.

6) (AFTN) João deve a um banco $ 190 000,00 que deverá pagar daqui a 30 dias. Por não dispor de numerário suficiente, ele propôs a prorrogação da dívida por mais 90 dias. Admitindo-se 0 como data de referência e uma taxa de desconto comercial simples de 72% a.a., o valor do novo título será de:

a) $ 235 000,00.
b) $ 238 000,00.
c) $ 240 000,00.
d) $ 243 000,00.
e) $ 245 000,00.

7) (TC-DF) Um título com valor nominal de $ 110 000,00 foi resgatado dois meses antes do seu vencimento, sendo-lhe por isso concedido um desconto racional simples à taxa de 60% a.m. Nesse caso, de quanto foi o valor pago pelo título?

8) (Metrô-SP) Uma pessoa pretende saldar uma dívida, cujo valor nominal é de $ 2 040,00, 4 meses antes de seu vencimento. Qual será o valor a ser pago pelo título se a taxa racional simples usada no mercado é de 5% ao mês?

9) (TTN) Utilizando o desconto racional, qual é o valor que devo pagar por um título com vencimento daqui a 6 meses se o seu valor nominal for de $ 29 500,00 e eu desejo ganhar 36% ao ano?

10) (CEB-DF) Um título com valor nominal de $ 3 836,00 foi resgatado 4 meses antes de seu vencimento, tendo sido concedido um desconto racional simples à taxa de 10% a.m. De quanto foi o valor pago pelo título?

11) (ESAF) Determine a taxa de juros mensal para que sejam equivalentes hoje os capitais de $ 1 000,00, com vencimento em 2 meses, e $ 1 500,00, com vencimento em 3 meses, considerando-se o desconto comercial simples.

12) (TTN) O valor atual racional de um título é igual à metade de seu valor nominal. Calcule a taxa de desconto, sabendo que o pagamento desse título foi antecipado em 5 meses.

TESTES E QUESTÕES DE VESTIBULARES

1) (Fuvest-SP) Uma loja vende seus artigos nas seguintes condições: à vista, com 30% de desconto sobre o preço de tabela, ou no cartão de crédito, com 10% de acréscimo sobre o preço de tabela. Um artigo que sai à vista por $ 7 000,00 sairá no cartão por:

a) $ 13 000,00.
b) $ 11 000,00.
c) $ 10 010,00.
d) $ 9 800,00.
e) $ 7 700,00.

2) (Vunesp-SP) Entre 10 de fevereiro e 10 de novembro de 1990, o preço do quilograma de mercadorias num determinado "sacolão" sofreu um aumento de 275%. Se o preço do quilograma em 10 de novembro era de $ 67,50, qual o preço em 10 de fevereiro?

a) $ 19,00
b) $ 18,00
c) $ 18,50
d) $ 19,50
e) $ 17,00

3) (Fuvest-SP) 95% da massa de uma melancia de 10 kg é constituída por água. A fruta é submetida a um processo de desidratação (que elimina apenas a água) até que a participação da água na massa da melancia se reduza a 90%. A massa da melancia após esse processo de desidratação será igual a:

a) $\frac{5}{9}$ kg.
b) $\frac{9}{5}$ kg.
c) 5 kg.
d) 9 kg.
e) 9,5 kg.

4) (PUC-SP) Ao responder um teste, um aluno acertou 20 das 30 primeiras questões e errou 64% do restante. Feita a correção, verificou-se que o total de acertos correspondia a 47,5% do número de questões propostas. Qual o total de questões desse teste?

5) (Unicamp-SP) Um eletrodoméstico está à venda por $ 1 200,00 em três pagamentos: $ 400,00 de entrada, $ 400,00 um mês depois e $ 400,00 dois meses depois. Para pagamento à vista, o comerciante dá um desconto de 20%. Supondo que a inflação esteja estabilizada em 2% ao mês e que, mantendo o dinheiro no banco, o comprador ganhe essa correção mensal, verifique qual dos dois planos é mais vantajoso (à vista ou a prazo) e explique por quê.

6) (Fuvest-SP) Uma mercadoria, cujo preço de tabela é $ 8 000,00, é vendida à vista e com desconto de x%, ou em duas parcelas iguais de $ 4 000,00, sendo a pri-

meira no ato da compra e a segunda um mês após a compra. Suponha que o comprador dispõe do dinheiro necessário para pagar à vista e que ele sabe que a diferença entre o preço à vista e a primeira parcela pode ser aplicada no mercado financeiro a uma taxa de 25% ao mês. Nessas condições, responda:

a) Se x = 15, será vantajosa para ele a compra a prazo? Explique.

b) Qual é o valor de **x** que torna indiferente comprar à vista ou a prazo? Explique.

7) (Vunesp-SP) Segundo dados de um estudo, 100 g de soja seca contêm 35 g de proteínas e 100 g de lentilha seca contêm 26 g de proteínas. Suponhamos que, ingerindo 70 g de proteínas por dia, uma pessoa se alimentasse apenas com esses dois produtos. Se num certo dia sua alimentação incluísse 140 g de soja seca, qual seria a quantidade de lentilha que deveria ser incluída nesta alimentação?

8) (FGV-SP) Chama-se margem de contribuição unitária a diferença entre o preço unitário de venda e o custo unitário de um produto. Se o preço unitário de venda é **p** e o custo unitário é **c**, responda:

a) Qual o valor de **p** em função de **c**, sabendo que a margem de contribuição unitária é 10% do preço de venda?

b) Se a margem de contribuição unitária for de 30% do preço de venda, qual a margem de contribuição unitária em porcentagem do custo unitário?

9) (FGV-SP) O sr. Mathias tem $ 12 000,00 para investir pelo prazo de um ano. Ele pretende investir parte numa aplicação **A**, cujo rendimento esperado é de 15% ao ano sobre o valor investido, e parte numa outra aplicação **B** que dá um rendimento esperado de 20% sobre o valor investido.

a) Qual o rendimento anual esperado se ele aplicar $ 7 000,00 em **A** e $ 5 000,00 em **B**?

b) Qual o máximo que deve investir em **A** para auferir um ganho esperado de no mínimo $ 2 200,00 daqui a um ano?

10) (FGV-SP) Um vendedor recebe mensalmente um salário fixo de $ 800,00 mais uma comissão de 5% sobre as vendas do mês. Em geral, a cada duas horas e meia de trabalho, ele vende o equivalente a $ 500,00. Responda:

a) Qual seu salário mensal em função do número **x** de horas trabalhadas por mês?

b) Se ele costuma trabalhar 220 horas por mês, o que é preferível: um aumento de 20% no salário fixo ou um aumento de 20% (de 5% para 6%) na taxa de comissão?

11) (FGV-SP) Um produto cujo preço era de $ 220,00 teve dois aumentos sucessivos de 15% e 20%, respectivamente. Em seguida, o valor resultante teve um desconto percentual igual a **x**, resultando num preço final **y**.

a) Calcule **y** se x = 10%.

b) Calcule **x** se y = $ 290,00.

12) (FGV-SP) A fábrica ALFA produz um aparelho eletrodoméstico em duas versões: luxo (**L**) e popular (**P**). Cada unidade de **L** requer 3 horas de trabalho semanais e cada unidade de **P** requer 2,5 horas de trabalho semanais. A ALFA tem disponibilidade de 120 horas semanais de máquina para fazer as duas versões.

a) Se numa determinada semana não for produzido o modelo **L**, calcule quantas unidades do modelo **P** poderão ser produzidas.

b) Se numa outra semana forem produzidas 30 unidades de **P**, calcule quantas unidades do modelo **L** poderão ser produzidas.

13) (Vunesp-SP) Um vendedor recebe comissão de 0,5% sobre o preço de venda de cada unidade de certa mercadoria. Num mês em que o preço de venda de cada unidade era $ 300,00, sua comissão foi de $ 2 550,00. Quantas unidades da mercadoria ele vendeu naquele mês?

a) 1 500 b) 1 600 c) 1 700 d) 1 800 e) 1 900

14) (Vunesp-SP) Durante um período em que a inflação foi de 500%, o preço de certo modelo de automóvel subiu 700%, passando a custar $ 40 000,00. Quanto custaria esse modelo ao fim do período considerado se seus aumentos de preço tivessem se limitado a acompanhar a inflação?

15) (Fuvest-SP) Um recipiente contém uma mistura de leite natural e leite de soja num total de 200 L, dos quais 25% são de leite natural. Que quantidade de leite de soja deverá ser acrescentada a essa mistura para que ela venha a conter 20% de leite natural?

16) (Unicamp-SP) Um vendedor propõe a um comprador de um determinado produto as seguintes alternativas de pagamento:

a) Pagamento à vista, com 65% de desconto sobre o preço de tabela.

b) Pagamento em 30 dias, com desconto de 55% sobre o preço de tabela.

Qual das duas alternativas é mais vantajosa para o comprador, considerando que ele consegue, com uma aplicação de 30 dias, um rendimento de 25%?

17) (Vunesp-SP) A razão entre o número de homens e mulheres com curso universitário completo numa certa cidade é $\frac{3}{2}$. Se 24% da população dessa

cidade tem curso universitário completo, determine a porcentagem de mulheres que deverão ter o nível de escolaridade considerado.

18) (Vunesp-SP) A diferença entre o preço de venda anunciado de uma mercadoria e o preço de custo é igual a $ 2 000,00. Se essa mercadoria for vendida por um desconto de 10% sobre o preço anunciado, dará ainda um lucro de 20% ao comerciante. Determine seu preço de custo.

19) (Fuvest-SP) Uma certa mercadoria que custava $ 12,50 teve um aumento e passou a custar $ 13,50. A majoração sobre o preço antigo foi de:

a) 1,0%. b) 10,0%. c) 12,5%. d) 8,0%. e) 10,8%.

20) (Fuvest-SP) Um vendedor ambulante vende seus produtos com um lucro de 50% sobre o preço de venda. Então, seu lucro sobre o preço de custo é de:

a) 10%. c) 33,333...%. e) 120%.

b) 25%. d) 100%.

21) (Fuvest-SP) Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Porém ele prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra. Qual é o maior desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço tabelado, de modo a não ter prejuízo?

a) 10% b) 15% c) 20% d) 25% e) 36%

22) (Fuvest-SP) Em uma prova de 25 questões, cada resposta certa vale + 0,4 e cada resposta errada vale −0,1. Um aluno resolveu todas as questões e teve nota 0,5. Qual a porcentagem de acertos desse aluno?

a) 25% b) 24% c) 20% d) 16% e) 5%

23) (FEI-SP) Uma engrenagem de 36 dentes movimenta uma outra de 48 dentes. Se a primeira engrenagem executa 100 voltas, a segunda executará:

a) 112 voltas. c) 84 voltas. e) 60 voltas.

b) 100 voltas. d) 75 voltas.

24) (PUC-SP) A metade de um terço da quantia que João possui corresponde a $ 600,00. A quanto corresponde um terço da metade da quantia que João possui?

a) $ 100,00 c) $ 300,00 e) $ 500,00

b) $ 200,00 d) $ 600,00

25) (Vunesp-SP) Suponhamos que, para uma dada eleição, uma cidade tivesse 18 500 eleitores inscritos. Suponhamos ainda que no caso de se verificar um índice de abstenção de 6% entre os homens e de 9% entre as mulheres, o número de votantes do sexo masculino será exatamante igual ao de votantes do sexo feminino. Determine o número de eleitores inscritos de cada sexo.

26) (Fuvest-SP) Numa certa população, 18% das pessoas são gordas, 30% dos homens são gordos e 10% das mulheres são gordas. Qual a porcentagem de homens na população?

27) (Fuvest-SP) Uma empresa que produz um único artigo está procurando determinar o volume de vendas para o mês de março, de modo que seu lucro neste mês represente 30% do total das vendas. Para produzir tal artigo, a empresa tem dois tipos de despesa: uma despesa fixa e uma despesa variável. A despesa fixa foi estimada em $ 120 000,00, enquanto a despesa variável deverá ser igual a 40% do total das vendas. Qual o volume de vendas que realiza as expectativas do empresário?

28) (Fuvest-SP) Uma compra de $ 330,00 deverá ser paga em duas parcelas iguais, sendo uma à vista e a outra a vencer em 30 dias. Se a loja cobra juros de 20% sobre o saldo devedor, então o valor de cada parcela será de:

a) $ 180,00. b) $ 198,00. c) $ 181,50. d) $ 175,00. e) $ 180,50.

29) (Unicamp-SP) O imposto de renda é calculado pela fórmula $\mathbf{i = r \cdot a - p}$, em que **i** = imposto; **r** = renda líquida; **a** = alíquota (%) e **p** = parcela a deduzir.

Para calcular o imposto **i**, o contribuinte deve fazer uso da seguinte tabela (adaptada do Manual do Contribuinte do Imposto de Renda Pessoa Física de 1996):

r	**a** (%)	**p**
até R$ 8 800,00	Isento	—
de R$ 8 801,00 a R$ 17 170,00	15	R$ 1 320,00
de R$ 17 171,00 a R$ 158 450,00	25	R$ 3 037,00
acima de R$ 158 450,00	35	R$ 18 882,00

a) Se um contribuinte teve uma renda de R$ 17 200,00, qual será o valor do seu imposto?

b) Se o mesmo contribuinte tivesse ganho R$ 200,00 **a menos**, qual teria sido seu imposto?

UNIDADE 2

MATEMÁTICA FINANCEIRA

CAPÍTULO 8

LOGARITMOS

1. Introdução

A origem dos logaritmos remonta ao século XVII e, ao que consta, eles tinham como função específica facilitar os cálculos aritméticos complicados que freqüentemente apareciam nas operações comerciais. Por exemplo:

$2{,}9 \cdot (1{,}03)^{91{,}14}$

Cálculos como esse, mesmo hoje em dia, são extremamente difíceis de ser feitos sem a ajuda de uma calculadora.

No entanto, podemos simplificar esta operação com a ajuda de tabelas. Apresentamos abaixo um trecho de uma dessas tabelas:

$10^a = c$	1,00	1,01	1,02	1,03	...	14,7	14,8	14,9
a	0	0,00432	0,00860	0,01284	...	1,16732	1,17026	1,17319

Nesse trecho, encontramos a transformação de um número em potência de base 10. Assim:

$10^0 = 1 \qquad 10^{0{,}00432} = 1{,}01 \qquad 10^{0{,}00860} = 1{,}02$

Não vamos estudar aqui a maneira pela qual foi construída essa tabela. Apenas iremos utilizá-la para resolver a operação apresentada acima.

Substituindo 1,03 por $10^{0{,}01284}$, temos:

$$2{,}9 \cdot (1{,}03)^{91{,}14} = 2{,}9 \cdot (10^{0{,}01284})^{91{,}14} = 2{,}9 \cdot 10^{0{,}01284 \cdot 91{,}14} = 2{,}9 \cdot 10^{1{,}17023}$$

Voltando à tabela, agora no sentido contrário, descobriremos que $10^{1{,}17023} \cong 14{,}8$.

Então:

$2{,}9 \cdot 10^{1{,}17023} \cong 2{,}9 \cdot 14{,}8 \cong 42{,}92$

Logo:

$2{,}9 \cdot (1{,}03)^{91{,}14} \cong 42{,}92$

Na potência:

$10^{1{,}17023} \cong 14{,}8$

o expoente 1,17023 é chamado *logaritmo*. Dizemos, portanto, que o *logaritmo de 14,8 na base 10 é 1,17023.*

Se tivermos ainda:

$2^3 = 8$

diremos que *3 é o logaritmo de 8 na base 2.*

Mais adiante usaremos uma tabela completa de logaritmos.

Você saberia dizer qual número indica o logaritmo e em que base está representada a expressão $5^3 = 125$?

2. Definição

Observe a igualdade:

$5^3 = 125$

Neste caso, podemos dizer que 3 é o logaritmo de 125 na base 5. Isso pode ser escrito da seguinte forma:

$\log_5 125 = 3$

Veja outros casos:

$2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$

$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$

$10^{0{,}3010} = 2 \Leftrightarrow \log_{10} 2 = 0{,}3010$

De modo geral, dados dois números reais **a** e **b**, *positivos* e com $b \neq 1$, chamamos *logaritmo* de **a** na base **b** ao número **c**, tal que $b^c = a$. Ou seja:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

O número **a** recebe o nome de *logaritmando* e **b** é a *base.*

Alguns logaritmos são fáceis de ser encontrados. Outros são achados nas tabelas.

Vejamos, agora, como encontrar alguns logaritmos sem o uso da tabela.

Exercícios resolvidos

1) Calcular:

a) $\log_4 16$

Solução

Se $\log_4 16 = x$, então $4^x = 16$.

Como $16 = 4^2$, temos:

$4^x = 4^2$

Comparando, vem que:

$x = 2$

Resposta: $\log_4 16 = 2$

b) $\log_{25} 5$

Solução

Se $\log_{25} 5 = x$, então $25^x = 5$.

Como $25 = 5^2$, temos:

$(5^2)^x = 5$

$5^{2x} = 5$ ou $2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Resposta: $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

c) $\log_3 1$

Solução

Se $\log_3 1 = x$, então $3^x = 1$.

Como $3^0 = 1$, temos:

$3^x = 3^0$ ou $x = 0$

Resposta: $\log_3 1 = 0$

Observação: De modo geral, para um número **a** qualquer, positivo e diferente de 1, temos:

$$\log_a 1 = 0$$

d) $\log_9 27$

Solução

Se $\log_9 27 = x$, então $9^x = 27$.

Como $9 = 3^2$ e $27 = 3^3$, temos:

$(3^2)^x = 3^3$

$3^{2x} = 3^3$ ou $2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Resposta: $\log_9 27 = \frac{3}{2}$

e) $\log_8 \frac{1}{2}$

Solução

Se $\log_8 \frac{1}{2} = x$, então $8^x = \frac{1}{2}$.

Como $8 = 2^3$ e $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, temos:

$(2^3)^x = 2^{-1}$

$2^{3x} = 2^{-1}$ ou $3x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$

Resposta: $\log_8 \frac{1}{2} = \frac{-1}{3}$

f) $\log_{10} 0{,}1$

Solução

Se $\log_{10} 0{,}1 = x$, então $10^x = 0{,}1$.

Como $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, temos:

$10^x = 10^{-1}$ ou $x = -1$

Resposta: $\log_{10} 0{,}1 = -1$

g) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

Solução

Se $\log_2 \sqrt[3]{2} = x$, então $2^x = \sqrt[3]{2}$.

Como $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, temos:

$2^x = 2^{\frac{1}{3}}$ ou $x = \frac{1}{3}$

Resposta: $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

h) $\log_{125} \sqrt[3]{25}$

Solução

Se $\log_{125} \sqrt[3]{25} = x$, então

$125^x = \sqrt[3]{25}$

Como $125 = 5^3$

e $\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$, temos:

$(5^3)^x = \sqrt[3]{5^2}$

$5^{3x} = 5^{\frac{2}{3}}$ ou $3x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{9}$

Resposta: $\log_{125} \sqrt[3]{25} = \frac{2}{9}$

2) O logaritmo de 243 numa certa base é 5. Qual é a base?

Solução

Se $\log_x 243 = 5$, então $x^5 = 243$.

Como $243 = 3^5$, temos:

$x^5 = 3^5$ ou $x = 3$

Resposta: A base é 3.

3) Qual é o logaritmo de –9 na base 3?

Solução

Se $\log_3 (-9) = x$, então $3^x = -9$.

Não há um número **x** que satisfaça essas condições. Lembre-se de que em $\log_b a$, **a** deve ser positivo.

Resposta: Não existe logaritmo de –9 na base 3.

4) Encontrar um número **x** tal que $\log_x 36 = 2$

Solução

Se $\log_x 36 = 2$, então $x^2 = 36$.

$x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$

Como não tem sentido $\log_{-6} 36$, ficaremos somente com $x = 6$.

Resposta: $x = 6$

Exercícios propostos

1) Calcule:

a) $\log_2 32$

b) $\log_{16} 64$

c) $\log_{10} 0{,}01$

d) $\log_{64} 64$

e) $\log_4 \frac{1}{4}$

f) $\log_2 \frac{1}{8}$

2) Determine o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_{16} \sqrt{32}$

b) $\log_4 \sqrt[3]{4}$

c) $\log_{\sqrt{3}} 3$

d) $\log_9 \sqrt{3}$

3) Efetue as operações e obtenha o valor das expressões a seguir.

a) $A = \log_9 81 + \log_8 \frac{1}{16} + \log_{625} 5$

b) $B = \log_{10} \frac{1}{10} - \log_{10} 100 + 4 \log_{10} 1\,000$

4) Calcule:

a) $\log_x x, x > 0$ e $x \neq 1$

b) $\log_a \frac{1}{a}, a > 0$ e $a \neq 1$

c) $\log_a a^n, a > 0$ e $a \neq 1$

d) $\log_a \sqrt[3]{a^2}, a > 0$ e $a \neq 1$

5) Determine o valor de **x** tal que:

a) $\log_x 4 = 1$

b) $\log_2 x = -1$

c) $\log_2 (4 + x) = 3$

d) $\log_2 \sqrt{x} = 4$

6) Calcule o resultado de $x + y$ sendo:

a) $\log_x 169 = 2$ e $\log_{(y+1)} 4 = 2$

b) $\log_x \sqrt{16} = 2$ e $\log_y 0{,}00001 = -5$

7) Obtenha a soma dos seguintes logaritmos de base 10: $\log_{10} 100$, $\log_{10} 0{,}1$, $\log_{10} 1\,000$, $\log_{10} 0{,}01$

8) Qual é a base na qual o logaritmo de 4 dá o mesmo resultado que o logaritmo de 10 na base 100?

3. Propriedades dos logaritmos

Quatro propriedades serão de importância fundamental nos cálculos com logaritmos daqui para frente. Vamos estudá-las.

Logaritmo de um produto

Já sabemos que $\log_2 16 = 4$ e $\log_2 8 = 3$. Podemos, então, encontrar o $\log_2 (16 \cdot 8)$ da seguinte maneira:

Se $\log_2 (16 \cdot 8) = x$, então $2^x = 16 \cdot 8$.

Como $2^4 = 16$ e $2^3 = 8$, então:

$2^x = 2^4 \cdot 2^3$ ou $x = 4 + 3$

Assim:

$\log_2 (16 \cdot 8) = 4 + 3$ ou ainda:

$\log_2 (16 \cdot 8) = \log_2 16 + \log_2 8$

De modo geral:

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

em que **a, b** e **c** são tais que tornam possível a existência da expressão.

Logaritmo de um quociente

Já sabemos que $\log_2 16 = 4$ e $\log_2 8 = 3$. Podemos, então, encontrar $\log_2 \left(\frac{16}{8}\right)$ da seguinte maneira:

Se $\log_2 \left(\frac{16}{8}\right) = x$, então $2^x = \frac{16}{8}$.

Como $16 = 2^4$ e $8 = 2^3$, podemos escrever:

$$2^x = \frac{2^4}{2^3}$$

$2^x = 2^{4-3}$ ou $x = 4 - 3$

Portanto:

$$\log_{16} 8 = \frac{3}{4} \text{ ou ainda}$$

$$\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16}$$

De modo geral, temos:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b},$$

tal que $a > 0, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1$

Nessa expressão, **c** é a base em que pretendemos trabalhar.

Exercícios resolvidos

5) Sabendo que $\log_2 5 = 2{,}289$ e $\log_2 6 = 2{,}585$, calcular:

a) $\log_2 30$

Solução

Como $30 = 5 \cdot 6$, então $\log_2 30 = \log_2 (5 \cdot 6)$.

Aplicando a propriedade do logaritmo do produto, vem:

$$\log_2 30 = \log_2 (5 \cdot 6) = \log_2 5 + \log_2 6 = 2{,}289 + 2{,}585 = 4{,}874$$

Resposta: $\log_2 30 = 4{,}874$

b) $\log_2 \left(\frac{5}{6}\right)$

Solução

Aplicando a propriedade do logaritmo do quociente, vem:

$$\log_2 \left(\frac{5}{6}\right) = \log_2 5 - \log_2 6 = 2{,}289 - 2{,}585 = -0{,}296$$

Resposta: $\log_2 \left(\frac{5}{6}\right) = -0{,}296$

c) $\log_2 625$

Solução

Como $625 = 5^4$, temos:

$\log_2 625 = \log_2 5^4$

Aplicando a propriedade do logaritmo de potência, temos:

$\log_2 625 = \log_2 5^4 = 4 \cdot \log_2 5 = 4 \cdot 2{,}289 = 9{,}156$

Resposta: $\log_2 625 = 9{,}156$

d) $\log_6 5$

Solução

Aplicando a propriedade da mudança de base, temos:

$$\log_6 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 6} = \frac{2{,}289}{2{,}585} \cong 0{,}885$$

Resposta: $\log_6 5 \cong 0{,}885$

6) Desenvolver as expressões a seguir, aplicando as propriedades dos logaritmos:

a) $\log_x \left(\frac{ab}{c}\right)$

Solução

$$\log_x \left(\frac{ab}{c}\right) = \log_x (ab) - \log_x c = \log_x a + \log_x b - \log_x c$$

b) $\log_x \left(\frac{a^2b^3}{c^4}\right)$

Solução

$$\log_x \left(\frac{a^2b^3}{c^4}\right) = \log_x (a^2b^3) - \log_x c^4 = \log_x a^2 + \log_x b^3 - \log_x c^4 =$$

$$= 2 \cdot \log_x a + 3 \cdot \log_x b - 4 \cdot \log_x c$$

7) Dados $\log_{10} 2 = 0{,}301$ e $\log_{10} 3 = 0{,}477$, calcular $\log_{10} 162$.

Solução

Decompondo 162 em fatores primos, encontramos $162 = 2 \cdot 3^4$. Então:

$$\log_{10} 162 = \log_{10} (2 \cdot 3^4)$$

Aplicando as propriedades, vem:

$$\log_{10} 162 = \log_{10} 2 + 4 \cdot \log_{10} 3 = 0{,}301 + 4 \cdot 0{,}477 = 2{,}209$$

8) Encontrar um número $x > 0$ tal que:

$$\log_5 x + \log_5 2 = 2$$

Solução

Utilizando a propriedade do logaritmo do produto ao contrário, teremos:

$$\log_5 x + \log_5 2 = 2$$

$$\log_5 (x \cdot 2) = 2 \Rightarrow x \cdot 2 = 5^2 \Rightarrow x = \frac{25}{2}$$

9) Resolver a equação:

$$\log_4 x = \log_2 3$$

Solução

Primeiramente, é preciso igualar as bases desses logaritmos, passando-os para a base 2.

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 3 \Rightarrow \frac{\log_2 x}{2} = \log_2 3$$

$$\log_2 x = 2 \cdot \log_2 3 \Rightarrow \log_2 x = \log_2 3^2$$

$$\log_2 x = \log_2 9$$

Comparando os dois termos da igualdade, concluímos que $x = 9$.

Resposta: $x = 9$

Exercícios propostos

9) Aplique as propriedades dos logaritmos para desenvolver as expressões abaixo.

a) $\log_c (a^2 b)$

b) $\log_c (a^3 b^4)$

c) $\log_c \left(\frac{a}{b^2}\right)$

d) $\log_c \sqrt{a}$

e) $\log_c \left(\frac{a}{b^2 d^3}\right)$

f) $\log_c \left(\frac{\sqrt{ab}}{d}\right)$

10) Dados $\log_{10} 2 = 0{,}301$ e $\log_{10} 3 = 0{,}477$, calcule:

a) $\log_{10} 6$

b) $\log_{10} 27$

c) $\log_{10} \left(\frac{1}{16}\right)$

d) $\log_{10} \left(\frac{3}{2}\right)$

e) $\log_{10} 54$

f) $\log_{10} \sqrt{8}$

11) Encontre o valor de **x**, tal que:

a) $\log_3 x + \log_3 4 = 2$

b) $\log_3 2 - \log_3 x = 4$

c) $\log_3 x - 1 = \log_3 2$

d) $\log_4 (x + 1) = \log_4 5$

12) Sabendo que $\log_{10} 51 = 1{,}708$, complete a tabela:

x	51	510	5 100	51 000	510 000
$\log_{10} x$					

13) Supondo $\log_{10} 2 = a$ e $\log_{10} 3 = b$, calcule em função de **a** e de **b** os seguintes logaritmos:

a) $\log_3 2$

b) $\log_2 3$

c) $\log_2 6$

d) $\log_{24} 12$

e) $\log_{12} \sqrt{2}$

f) $\log_{27} \frac{1}{18}$

14) Dado que $\log_{10} 2 = 0{,}301$, calcule $\log_{10} 5$ e $\log_2 5$. $\left(\text{Sugestão: } 5 = \frac{10}{2}.\right)$

15) Sabendo que $\log_{10} 2 = 0{,}301$, calcule:

a) $\log_{10} 0{,}2$ $\left(\text{Sugestão: } 0{,}2 = \frac{2}{10}.\right)$

b) $\log_{10} 0{,}02$

c) $\log_{10} 0{,}04$

d) $\log_{10} 0{,}004$

4. Logaritmos decimais

Por volta de 1615, o matemático Henry Briggs construiu a primeira tabela de logaritmos de base 10, isto é, calculou valores de **x** de tal forma que 10^x fosse igual a qualquer número desejado.

De posse de uma dessas tabelas e das propriedades dos logaritmos, podemos simplificar os cálculos que envolvem expoentes não inteiros, o que é comum nos juros e descontos compostos que ainda vamos estudar.

Para usar a tabela de logaritmos decimais, devemos perceber uma propriedade importante. Observe*:

$\log 3 = 0{,}477$

$\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 = 0{,}477 + 1 = 1{,}477$

$\log 300 = \log (3 \cdot 100) = \log 3 + \log 100 = 0{,}477 + 2 = 2{,}477$

$\log 3\,000 = \log (3 \cdot 1\,000) = \log 3 + \log 1\,000 = 0{,}477 + 3 = 3{,}477$

Nestes casos, a parte decimal (0,477) do logaritmo não se altera quando multiplicamos o número 3 por potências de 10 (10, 100, 1 000, ...). Podemos dizer, então, que:

$\log (3 \cdot 10^n) = n + 0{,}477$

O número inteiro **n** é chamado de *característica* e o decimal 0,477, de *mantissa*. A tabela só nos fornece as mantissas dos logaritmos; as características são valores que devemos calcular.

De modo geral podemos dizer que:

$$\log a = C + M$$

---

* No caso de logaritmo de base 10, não é necessário escrever a base.

em que **C** é a característica (que será calculada) e **M** a mantissa (que será obtic consultando a tabela).

Para encontrar as características de números maiores que 1, podemos estabele cer a seguinte regra prática:

> A característica do logaritmo decimal de um número maior que 1 será igual ao número de algarismos de sua parte inteira menos 1.

As características de log 35, log 4 500, log 2,37 e log 131,4, por exemplo, seriam 1, 3, 0 e 2, respectivamente.

Já no caso de números menores que 1 (e maiores que zero), as características podem ser encontradas da seguinte maneira:

$\log 3 = 0{,}477$

$$\log 0{,}3 = \log\left(\frac{3}{10}\right) = \log 3 - \log 10 = 0{,}477 - 1 = \overset{C}{\boxed{-1}} + \overset{M}{\boxed{0{,}477}} = -0{,}523$$

$$\log 0{,}03 = \log\left(\frac{3}{100}\right) = \log 3 - \log 100 = 0{,}477 - 2 = \overset{C}{\boxed{-2}} + \overset{M}{\boxed{0{,}477}} = -1{,}523$$

$$\log 0{,}003 = \log\left(\frac{3}{1\,000}\right) = \log 3 - \log 1\,000 = 0{,}477 - 3 = \overset{C}{\boxed{-3}} + \overset{M}{\boxed{0{,}477}} = -2{,}523$$

Então, note que:

> A característica do logaritmo decimal de um número entre 0 e 1, com **n** zeros antes do primeiro algarismo não nulo, será **–n**.

Dessa maneira, as características dos logaritmos decimais de 0,5, 0,053 e 0,000179 serão –1, –2 e –4, respectivamente.

Quando as características forem negativas, poderemos simplificar a escrita da seguinte maneira:

$\log 0{,}04 = -2 + 0{,}6020$

$\log 0{,}04 = \overline{2}{,}6020$

Esta forma de escrever $(\overline{2}{,}6020)$ é chamada de *forma preparada*.

Exercícios resolvidos

10) Encontrar na tabela de logaritmos:

a) log 47

Solução

log 47 = C + M = 1 + M

Pela tabela, M = 0,67210.

Portanto, log 47 = 1 + 0,67210 = 1,67210

Resposta: log 47 = 1,67210

b) log 1,54

Solução

log 1,54 = C + M = 0 + M

Localizando o número 154 na tabela, encontraremos M = 0,18752.

log 1,54 = 0 + 0,18752 = 0,18752

Resposta: log 1,54 = 0,18752

c) log 0,039

Solução

log 0,039 = C + M = $\bar{2}$ + M

Localizando o número 39 na tabela, encontraremos M = 0,59106.

log 0,039 = $\bar{2}$ + 0,59106 = −1,40894

Resposta: log 0,039 = −1,40894

Observação: Em vez de fazer a conta $\bar{2}$ + 0,59106, podemos também deixar a resposta na forma preparada $\bar{2}$,59106.

d) log 0,150

Solução

log 0,150 = C + M = $\bar{1}$ + M

Localizando o número 15 ou 150 na tabela, encontraremos M = 0,17609.

$$\log 0{,}150 = \bar{1} + 0{,}17609 = \underbrace{\bar{1},17609}_{\text{forma preparada}} = \underbrace{-0{,}82391}_{\text{forma decimal}}$$

Resposta: log 0,150 = −0,82391 = $\bar{1}$,17609

e) log 325 000

Solução

log 325 000 = C + M = 5 + M

Localizando o número 325 na tabela, encontraremos M = 0,51188.

log 325 000 = 5 + 0,51188 = 5,51188

Resposta: log 325 000 = 5,51188

Observação: Se tivéssemos que encontrar 325 320, em vez de 325 000, a tabela que possuímos seria insuficiente.

11) Utilizar a tabela de logaritmos para descobrir o número **x**, tal que:

a) log x = 1,50651

Solução

Separando a característica da mantissa, temos:

log x = 1 + 0,50651

Localizando o número 50651 na coluna *mantissa* da tábua de logaritmos, encontraremos 321. Como a característica é 1, o número procurado é 32,1.

Assim: log 32,1 = 1,50651.

Resposta: x = 32,1

b) log x = 3,03342

Solução

Separando a característica da mantissa, temos:

log x = 3 + 0,03342

Localizando o número 03342 na coluna *mantissa* da tábua de logaritmos, encontraremos 108. Como a característica é 3, o número procurado é 1 080.

Assim: log 1 080 = 3,03342.

Resposta: x = 1 080

c) log x = $\overline{4}$,56703

Solução

Separando a característica da mantissa, temos:

log x = −4 + 0,56703

Localizando o número 56 703 na coluna *mantissa* da tábua de logaritmos, encontraremos 369. Como a característica é −4, o número procurado é 0,000369.

Assim: log 0,000369 = $\overline{4}$,56703.

Resposta: x = 0,000369

d) $\log x = -1{,}64589$

Solução

Separando a característica da mantissa, temos:

$\log x = -1{,}64589 = -2 + 0{,}35411$

(Atenção! Observe que $-1{,}64589 \neq -1 + 0{,}64589$.)

Localizando o número 35 411 na coluna *mantissa* da tábua de logaritmos, encontraremos 226. Como a característica é –2, o número procurado é 0,0226.

Assim: $\log 0{,}0226 = -1{,}64589$.

Resposta: $x = 0{,}0226$

e) $\log x = 1{,}55100$

Solução

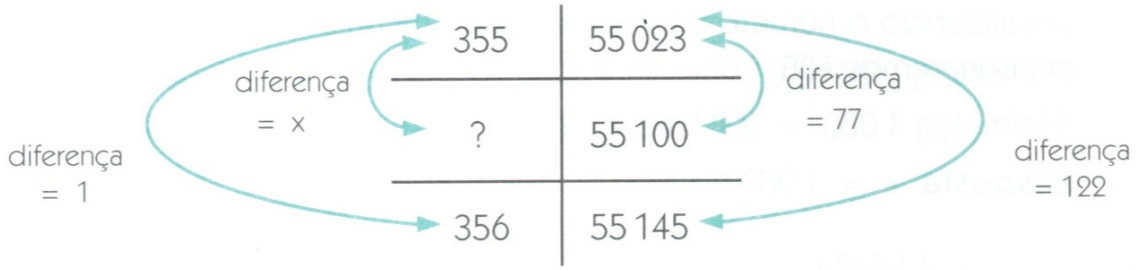
Separando a característica da mantissa, temos:

$\log x = 1 + 0{,}55100$

Procurando o número 55 100, veremos que ele não se encontra na tábua de logaritmos. No entanto, estaria localizado entre 55 023 e 55 145. Assim:

355	55 023
356	55 145

Em casos como esse, podemos fazer uma melhor aproximação por meio de um processo chamado *interpolação linear*. Esse processo consiste numa regra de três que passamos a montar:



Diferença no número	*Diferença na mantissa*
x	77
1	122

$$122x = 77 \Rightarrow x = \frac{77}{122} \Rightarrow x \cong 0{,}631$$

Dessa maneira, adicionando a diferença 0,631 ao número 355, obteremos o número 355,631. Como a característica é 1, devemos ter:

$\log 35{,}5631 = 1{,}55100$

Esse processo de interpolação pode ser usado caso o exercício venha a requerer uma maior aproximação.

Resposta: $x = 35{,}5631$

12) Utilize a tabela de logaritmos para calcular, aproximadamente, $120^{0,31}$.

Solução

Chamando $x = 120^{0,31}$ e aplicando logaritmos aos dois lados da igualdade, teremos:

$\log x = \log 120^{0,31} \Rightarrow \log x = 0{,}31 \cdot \log 120$

Usando a tabela para log 120, vem:

$\log x = 0{,}31\,(2 + 0{,}07918) = 0{,}31 \cdot 2{,}07918 = 0{,}64455 = 0 + 0{,}64455$

Procurando na tabela o número que tem mantissa 0,64455, encontraremos 441 (valor mais próximo). Como a característica é zero, **x** deve ser um número entre 10^0 e 10^1, ou 1 e 10. Assim:

$x \cong 4{,}41$

Resposta: $120^{0,31} \cong 4{,}41$

13) Calcular, aproximadamente, $2{,}54 \cdot (1{,}03)^{2,7}$.

Solução

Chamando $x = 2{,}54 \cdot (1{,}03)^{2,7}$ e aplicando logaritmos aos dois lados da igualdade, teremos:

$\log x = \log [2{,}54 \cdot (1{,}03)^{2,7}] = \log 2{,}54 + 2{,}7 \cdot \log 1{,}03$

Usando a tabela para log 2,54 e log 1,03, encontraremos:

$\log 2{,}54 = 0 + 0{,}4048 = 0{,}4048$

$\log 1{,}03 = 0 + 0{,}0128 = 0{,}0128$

Voltando à expressão, temos:

$\log x = 0{,}4048 + 2{,}7 \cdot 0{,}0128 = 0{,}43936 = 0 + 0{,}43936$

Lembrando que a característica é zero e procurando 0,43936 dentre as mantissas, encontraremos 275 (valor mais próximo). Portanto, $x \cong 2{,}75$.

Resposta: $2{,}54 \cdot (1{,}03)^{2,7} \cong 2{,}75$

Exercícios propostos

16) Utilizando a tabela de logaritmos decimais, calcule:

a) log 125
b) log 1,25
c) log 1 250
d) log 0,41
e) log 4,1
f) log 23,5
g) log 0,00895
h) log 8,95
i) log 98,30

17) Ainda utilizando a tabela, encontre o valor de **x** tal que:

a) $\log x = 1{,}4728$
b) $\log x = 3{,}5999$
c) $\log x = 0{,}0043$
d) $\log x = 2{,}7324$
e) $\log x = 6{,}6522$
f) $\log x = -1{,}3478$
g) $\log x = -0{,}7033$
h) $\log x = -2{,}4660$
i) $\log x = \overline{2}{,}5539$
j) $\log x = -0{,}6002$

18) Resolva a equação $5^x = 100$, utilizando a tabela de logaritmos.

19) Calcule o valor de **y** na equação $3^y = 18$, com aproximação de centésimos.

20) Calcule com aproximação de milésimos:

a) $(31{,}4)^{0{,}51}$
b) $(3{,}1)^{2{,}4} \cdot 41{,}4$
c) $41 \cdot (1{,}32)^{4{,}5}$
d) $12\,000 \cdot (1{,}04)^{2{,}5}$ (Utilize interpolação.)

21) Uma certa população de insetos cresce de acordo com a expressão $N = 3\,000 \cdot 2^{\frac{t}{12}}$, em que **t** é o tempo em meses e **N** é o número de insetos na população após o tempo **t**. Calcule o número de insetos após um período de três meses e meio.

22) Um investimento de $ 2 000,00 é feito de modo que o montante de cada mês é obtido multiplicando-se o montante do mês anterior pelo fator 1,03. Calcule o montante total do investimento após quatro meses e meio. (Utilize interpolação.)

CAPÍTULO 9

JUROS COMPOSTOS

1. Introdução

Já vimos que os juros simples são aqueles calculados à taxa fixa, sempre a partir da mesma quantia inicial.

Veremos a seguir uma operação utilizada com mais freqüência: os *juros compostos*, em que o cálculo é feito de maneira um pouco diferente.

2. Juros compostos

Imagine um investimento de $ 20 000,00 a uma taxa de 10% ao mês. Há dois modos de calcular o montante, mensalmente:

a) Juros simples — Para calcular esse tipo de juro, devemos aplicar a taxa sobre o capital inicial e somar o resultado ao montante do mês imediatamente anterior. Veja um exemplo:

Ao final do 1º mês: $20\,000 + 0{,}1 \cdot 20\,000 = 22\,000$

Ao final do 2º mês: $22\,000 + 0{,}1 \cdot 20\,000 = 24\,000$

Ao final do 3º mês: $24\,000 + 0{,}1 \cdot 20\,000 = 26\,000$

Ao final do 4º mês: $26\,000 + 0{,}1 \cdot 20\,000 = 28\,000$

O juro total produzido é de:

$ 28 000,00 − $ 20 000,00 = $ 8 000,00

b) Juros compostos — Para calcular esse tipo de juro, devemos aplicar a taxa sobre o montante do mês imediatamente anterior. Veja o exemplo:

Ao final do 1º mês: $20\,000 + 0{,}1 \cdot 20\,000 = 22\,000$

Ao final do 2º mês: $22\,000 + 0{,}1 \cdot 22\,000 = 24\,200$

Ao final do 3º mês: $24\,200 + 0{,}1 \cdot 24\,200 = 26\,620$

Ao final do 4º mês: $26\,620 + 0{,}1 \cdot 26\,620 = 29\,282$

O juro total produzido ao final do quarto mês é de:

$ 29 282,00 – $ 20 000,00 = $ 9 282,00

Os juros calculados periodicamente com uma taxa fixa incidindo sobre o montante do período anterior são chamados de *juros compostos.*

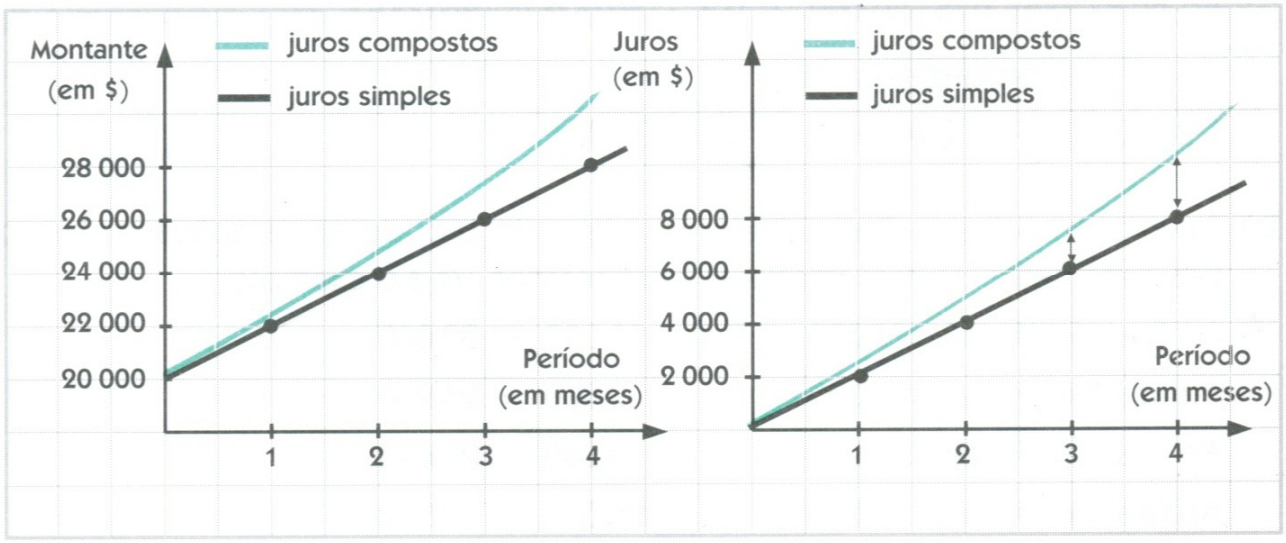
Construindo uma tabela em que relacionamos o montante a cada mês, temos:

Período	Montante com base no cálculo de juros simples	Montante com base no cálculo de juros compostos
1º mês	22 000	22 000
2º mês	24 000	24 200
3º mês	26 000	26 620
4º mês	28 000	29 282

Agora, vamos construir outra tabela em que relacionamos os juros simples e compostos a cada mês:

Período	Juros simples	Juros compostos
1º mês	2 000	2 000
2º mês	4 000	4 200
3º mês	6 000	6 620
4º mês	8 000	9 282

A seguir, apresentamos os gráficos construídos com base nessas tabelas. Veja:



Observe que a diferença entre os juros simples e compostos vai aumentando com o decorrer dos períodos.

A função que define os juros simples ($J = C \cdot i \cdot n$) é do primeiro grau; sendo assim, seu gráfico é uma reta.

Você pode observar que a função que define os juros compostos é de outra natureza. O mesmo podemos dizer quanto à função que define o montante: no caso dos juros simples, a função é do primeiro grau e, por isso, tem por gráfico uma reta. O mesmo não ocorre com os juros compostos.

3. Montante

Podemos encontrar uma equação que nos permite calcular diretamente o montante a partir de uma taxa constante **i** e um capital **C**.

Sabemos que $M = C + J$. Como $J = C \cdot i$, cada montante poderá ser calculado da seguinte maneira:

1º período: $M_1 = C + Ci = C(1 + i)$

2º período: $M_2 = M_1 + M_1 i = M_1(1 + i)$

3º período: $M_3 = M_2 + M_2 i = M_2(1 + i)$

Genericamente, podemos escrever:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} i = M_{n-1}(1 + i)$$

Como $M_1 + C(1 + i)$, podemos substituir M_1 por esse valor em M_2. O valor obtido para M_2 deve ser agora substituído em M_3 e assim sucessivamente:

$$M_2 = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

$$M_3 = C(1 + i)^2 (1 + i) = C(1 + i)^3$$

$$M_4 = C(1 + i)^3 (1 + i) = C(1 + i)^4$$

Podemos concluir, então, que para um período **n** de tempo, o montante **M** será dado por:

$$M = C(1 + i)^n$$

Nessa fórmula, **C** é o capital e **i**, a taxa.

O cálculo do montante poderá ser elaborado de três maneiras:

- utilizando logaritmos decimais;
- recorrendo à tabela que determina $(1 + i)^n$;
- utilizando uma calculadora eletrônica que possua tecla exponencial.

Exercícios resolvidos

1) Calcular o montante de um capital inicial de $ 6 000,00, a juros composto 5% a.m., durante 6 meses.

Solução

Utilizando a fórmula $M = C(1 + i)^n$, podemos resolver de dois modos problema.

Primeiro modo — Com uso de logaritmos

Como $C = 6\,000$, $i = 5\%$ ou $0,05$ e $n = 6$, temos:

$M = 6\,000(1 + 0,05)^6$

$\log M = \log [6\,000(1 + 0,05)^6]$

Aplicando as propriedades dos logaritmos, vem:

$\log M = \log 6.000 + \log (1 + 0,05)^6 = 3,778151 + 6 \cdot \log 1,05 =$

$= 3,778151 + 6 \cdot .0,021189 = 3,905285 \Rightarrow M \cong 8\,040,56$

Segundo modo — Com o uso da tabela 5 para determinar, aproximadam $(1 + i)^n$

$M = 6\,000(1 + 0,05)^6$

Consultando a tabela 5 para $i = 5\%$ e $n = 6$, encontramos o fator 1,340 Então:

$M = 6\,000 \cdot 1,3400956 \cong 8\,040,57$

Resposta: O montante é de, aproximadamente, $ 8 040,57.

2) Calcular o montante para um capital inicial de $ 10 000,00, a juros comp de 4% a.m., durante 8 meses e 12 dias.

Solução

Mais uma vez, podemos resolver de dois modos esse problema.

Primeiro modo — Com o uso de logaritmos

$M = C(1 + i)^n$

Como $C = 10\,000$ e $i = 4\%$ ou $0,04$, temos:

$M = 10\,000(1 + 0,04)^n$

Para calcular o período (n = 8 meses e 12 dias), temos:

$$8 + \frac{12}{30} = 8 + \frac{2}{5} = \frac{42}{5}$$

Então:

$$\log M = \log [10\,000(1{,}04)^n] = \log \left[10\,000(1{,}04)^{\frac{42}{5}}\right] = \log 10\,000 +$$

$$+ \frac{42}{5} \cdot \log 1{,}04 = 4 + \frac{42}{5} \cdot 0{,}017033 = 4{,}143077 \Rightarrow M \cong 13\,902$$

Segundo modo — Com o uso da tabela 5, ou seja, de $(1 + i)^n$

Como os valores não são inteiros, vamos usar o artifício da interpolação para calcular, com uma aproximação razoável, o valor de $(1 + i)^n$. Observe que $(1 + i)^{\frac{42}{5}}$ é um valor que deve estar entre $(1 + i)^8$ e $(1 + i)^9$, pois $\frac{42}{5} = 8{,}4$.

Como a taxa é de 4%, temos:

$$\left.\begin{array}{l}(1. + i)^8 = 1{,}3685691 \\ (1 + i)^9 = 1{,}4233118\end{array}\right\} \Rightarrow \text{A diferença é de } 0{,}0547427.$$

A interpolação consiste em montar uma regra de três, que não é rigorosamente correta, mas dá uma boa aproximação.

Como a diferença entre 8 e 9 é 1, podemos escrever:

Diferença dos expoentes	*Diferença dos fatores*
$9 - 8 = 1$ ↓	$0{,}0547427$ ↓
$8{,}4 - 8 = 0{,}4$ ↓	x ↓

$$x = 0{,}4 \cdot 0{,}0547427 \cong 0{,}021897$$

Então:

$$(1 + i)^{\frac{42}{5}} \cong 1{,}3685691 + 0{,}021897 \cong 1{,}39046$$

Veja que a diferença entre o resultado obtido por esse processo e o primeiro, em que utilizamos logaritmos, é insignificante.

No caso de períodos não inteiros, utilizar logaritmos ou uma calculadora com tecla exponencial para tornar seu cálculo mais fácil.

Resposta: O montante é de, aproximadamente, $ 13 904,60.

3) Qual o montante que um capital inicial de $ 8 000,00 pode produzir, aplicac do dia 3 de março a 16 de julho, à taxa de 3% a.m. de juros compostos?

Solução

A primeira dificuldade que temos é determinar o período. (Veja a tabela pa contagem dos dias do ano civil, que você usou no capítulo 6, unidade 1.)

$197 - 62 = 135$ dias ou $\frac{135}{30} = 4{,}5$ meses

$M = C(1 + i)^n$

Como $i = 3\%$ ou $0{,}03$ e $C = 8\,000$, temos:

$M = C(1 + 0{,}03)^{4{,}5} = 8\,000 \cdot (1{,}03)^{4{,}5}$

Usando logaritmo, vem:

$\log M = \log 8\,000 \cdot (1{,}03)^{4{,}5} = \log 8\,000 + \log (1{,}03)^{4{,}5} = 3{,}903090 +$

$+ 4{,}5 \cdot \log 1{,}03 = 3{,}903090 + 0{,}057767 = 3{,}960857$

Portanto:

$M \cong 9\,138{,}13$

Resposta: O montante é de, aproximadamente, $ 9 138,13.

4) Colocada em um banco, uma quantia rendeu $ 40 000,00 a juros compostos 2% a.m., durante 5 meses. Calcular essa quantia.

Solução

$M = C(1 + i)^n$

Como $M = 40\,000$, $i = 2\%$ ou $0{,}02$ e $n = 5$, temos:

$40\,000 = C(1 + 0{,}02)^5$

Usando a tabela $(1 + i)^n$, vem:

$$40\,000 = C \cdot 1{,}1040808 \Rightarrow C = \frac{40\,000}{1{,}1040808} \cong 36\,229{,}23$$

Resposta: O capital aplicado foi de, aproximadamente, $ 36 229,23.

5) Durante quanto tempo é preciso aplicar $ 5 000,00, à taxa de 7% a.m., para produzir o montante de $ 12 000,00?

Solução

$M = C(1 + i)^n$

Como $M = 12\,000$, $C = 5\,000$ e $i = 7\%$ ou $0,07$, temos:

$12\,000 = 5\,000(1 + 0,07)^n \Rightarrow 12 = 5 \cdot (1,07)^n$

Primeiro modo — Com o uso de logaritmo

$\log 12 = \log 5 \cdot (1,07)^n = \log 5 + \log (1,07)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 1,079181 = 0,69897 + n \cdot \log 1,07 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1,079181 - 0,69897 = n \cdot 0,029384 \Rightarrow 0,380211 = 0,029384 \cdot n$

$n = \dfrac{0,380211}{0,029384} \cong 12,9$ meses

O período é de 12 meses e 27 dias, pois:

$12\,\dfrac{9}{10} = 12\,\dfrac{27}{30}$

Segundo modo — Com o uso da tabela 5, ou seja, de $(1 + i)^n$

$12 = 5(1 + i)^n \Rightarrow (1 + i)^n = \dfrac{12}{5} = 2,4$

Como a taxa é de 7%, o valor mais próximo a esse valor encontrado na tabela é de 2,4098450, referente ao período de 13 meses.

Utilizando o artifício da interpolação e considerando uma taxa de 7% a.m.:

para $n = 12$, o fator é 2,252196
para $n = 13$, o fator é 2,4098450
$\Rightarrow$ A diferença entre esses dois valores é de 0,157649.

Diferença de período

$13 - 12 = 1$
x

Diferença de fator

0,157649
0,147804 $(2,4 - 2,252196)$

$x = \dfrac{0,147804}{0,157649} \cong 0,93$

$x \cong \dfrac{93}{100} \Rightarrow \dfrac{93}{100} \cong \dfrac{28}{30}$

Então:

$x \cong 28$ dias

Resposta: O período é de, aproximadamente, 12 meses e 28 dias.

6) Um capital de $ 7 500,00 aplicado durante 5 meses produziu um montante de $ 9 500,00. Qual foi a taxa mensal aplicada?

Solução

$M = C(1 + i)^n$

Como $M = 9\,500$, $C = 7\,500$ e $n = 5$, temos:

$9\,500 = 7\,500(1 + i)^5 \Rightarrow 95 = 75(1 + i)^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 95 = \log [75 \cdot (1 + i)^5] = \log 75 + \log (1 + i)^5 =$

$= \log 75 + 5 \cdot \log (1 + i) \Rightarrow 1{,}9777236 = 1{,}875061 + 5 \cdot \log(1 + i) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}9777236 - 1{,}875061 = 5 \cdot \log (1 + i) \Rightarrow 0{,}1026626 = 5 \cdot \log (1 + i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(1 + i) = \dfrac{0{,}1026626}{5} = 0{,}0205325 \Rightarrow 1 + i \cong 1{,}05 \Rightarrow$

$\Rightarrow i \cong 0{,}05$ ou 5%

Resposta: A taxa é de, aproximadamente, 5% a.m.

7) Na porta de um grande banco, encontra-se um cartaz onde se lê "Aplique hoje $ 1 788,80 e receba $ 3 000,00 daqui a 6 meses". Qual é a taxa mensal de juros que o banco está aplicando sobre o dinheiro investido?

Solução

$M = C(1 + i)^n$

Como $M = 3\,000$, $C = 1\,788{,}80$ e $n = 6$, temos:

$3\,000 = 1\,788{,}80(1 + i)^6 \Rightarrow \dfrac{3\,000}{1\,788{,}80} = (1 + i)^6 \Rightarrow 1{,}67710 = (1 + i)^6$

Procurando na tabela 5 de juros compostos o fator 1,67710 correspondente a $n = 6$, encontramos $i = 9\%$.

Resposta: A taxa de juros aplicada pelo banco é de 9% a.m.

Exercícios propostos

1) Colocando $ 6 000,00 à taxa de juros compostos de 3% a.m. durante 8 meses, qual o montante?

2) Calcule os juros compostos de $ 25 000,00 aplicados durante 9 meses, à taxa de 6% a.m.

3) Qual o montante de $ 152 000,00 à taxa de juros compostos de 7% a.m., durante 3 meses e 12 dias?

4) Qual o montante de $ 726 000,00 à taxa de juros compostos de 9% a.m., aplicados de 22 de junho a 30 de novembro do mesmo ano?

5) A que taxa se devem colocar $ 26 000,00 a juros compostos para que se tenha, em 28 meses, o montante de $ 260 000,00?

6) Aplicando um certo capital a juros compostos, durante 24 meses, recebi o quádruplo do valor aplicado. A que taxa ocorreu a operação?

7) Para duplicar um capital qualquer em 10 meses e 15 dias, aplicado a juros compostos, que taxa devo utilizar?

8) Aplicando $ 100 000,00 a juros compostos, recebi $ 270 000,00 depois de 3 anos. Que taxa foi utilizada nessa aplicação?

9) Apliquei $ 78 000,00 a juros compostos de 8% a.m. e recebi $ 152 000,00. Durante quanto tempo esteve aplicado meu capital?

10) Qual é o tempo necessário para que um capital, colocado a juros compostos de 5% a.m., duplique?

11) Calcule o capital inicial depositado a juros compostos de 9% a.m., sabendo que no fim de 7 meses seu montante era de $ 820 000,00.

12) Que capital foi aplicado a juros compostos de 6% a.m., sabendo que no fim de 15 meses o montante era de $ 625 000,00?

13) Um certo aplicador colocou no mercado financeiro um capital de $ 150 000,00 a juros compostos de 7% a.m., durante 3 meses e 20 dias. Em seguida, reaplicou o montante ainda a juros compostos de 10% a.m. No final da operação, recebeu $ 620 000,00. Qual o período total em que o capital esteve aplicado?

14) Qual o tempo necessário para que um certo capital, colocado a juros compostos de 5% a.m., produza juros de 80% do seu valor?

15) Copie a tabela abaixo em seu caderno, completando-a corretamente:

Aplicação	Capital ($)	Taxa a.m. (juros compostos)	Período	Monta ($
1	600,00	6%	6 meses	.....
2	1 200,00	7%	5 meses	.....
3	.....	4%	4 meses	1 50
4	.....	5%	9 meses	8 50
5	800,00	.....	30 meses	1 60
6	750,00	7%	.....	1 20
7	360,00	.....	2 meses	39
8	1 000,00	9%	3 meses e 10 dias	1 33
9	1 400,00	8%	.....	2 00
10	2 500,00	6%	4 meses e 12 dias	3 23

4. Taxas equivalentes

Se aplicarmos um capital de $ 50 000,00 durante 3 meses a uma ta 10% a.m., o montante obtido será o mesmo que o produzido por uma taxa t tral de 30%? Você sabe que para os juros simples, a resposta seria sim. Vamc lisar esse caso para os juros compostos:

Situação 1:

$M_1 = 50\,000(1 + 0{,}1)^3 = 50\,000 \cdot 1{,}331 = 66\,550$

Situação 2:

$M_2 = 50\,000(1 + 0{,}3)^1 = 65\,000$

Por este cálculo, concluímos que o montante obtido não é o mesmo, o para juros compostos as *taxas proporcionais* não fornecem montantes iguais.

Para que M_1 fosse igual a M_2, deveríamos aumentar a segunda taxa, mante capital. Essa taxa obtida seria *equivalente* à primeira e chamada de *efetiva*. As

$$50\,000(1 + i) = 66\,550 \Rightarrow 1 + i = \frac{66\,550}{50\,000} \Rightarrow 1 + i = 1{,}331$$

Então:

$i = 0{,}331$ ou 33,1% por trimestre

Aprofundando um pouco este raciocínio, vamos descobrir a taxa trimestr tiva de uma aplicação a juros compostos, em que a taxa anual é de 12,0% a.a um capital qualquer **C**.

Como o ano tem quatro trimestres, a taxa $i = 0{,}12$ a.a. tem $\frac{i}{4}$ como taxa trimestral proporcional, mas não equivalente. Vamos chamar de $\mathbf{i_4}$ a taxa equivalente procurada:

$$M = C(1 + i_4)^4 = C(1 + 0{,}12)^1$$

$$(1 + i_4)^4 = 1 + 0{,}12 \Rightarrow 1 + i_4 = \sqrt[4]{1{,}12}$$

Aplicando logaritmo:

$$\log(1 + i_4) = \log \sqrt[4]{1{,}12} = \log (1{,}12)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \log 1{,}12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(1 + i_4) \cong \frac{1}{4} \cdot 0{,}04918 \Rightarrow \log(1 + i_4) \cong 0{,}012345 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + i_4 \cong 1{,}029 \Rightarrow i_4 = 1{,}029 - 1 \cong 0{,}029 \text{ ou } i_4 = 2{,}9\%$$

Deste modo, aplicando o capital a 12% a.a. ou a 2,9% por trimestre, os juros produzidos em um ano serão, aproximadamente, os mesmos (o que vale dizer que tais taxas são equivalentes).

Vamos obter uma fórmula para o cálculo da taxa efetiva.

Consideremos que **i** é a taxa anual. Sabendo que o ano tem 6 bimestres, 4 trimestres, 3 quadrimestres, 2 semestres e 12 meses, teremos as seguintes taxas proporcionais que, a juros simples, produziriam o mesmo montante que a taxa anual **i**:

$\frac{i}{2}$: taxa semestral (produzirá o mesmo montante que **i** em 6 meses)

$\frac{i}{3}$: taxa quadrimestral

$\frac{i}{6}$: taxa bimestral

$\frac{i}{4}$: taxa trimestral

$\frac{i}{12}$: taxa mensal

Para um capital inicial **C**, vamos considerar que uma taxa proporcional $\frac{i}{2}$ produzirá uma taxa efetiva $\mathbf{i_2}$; uma taxa proporcional $\frac{i}{3}$ produzirá uma taxa efetiva $\mathbf{i_3}$, e assim por diante:

$\mathbf{i_2}$: taxa efetiva semestral;

$\mathbf{i_3}$: taxa efetiva quadrimestral;

$\mathbf{i_4}$: taxa efetiva trimestral;

$\mathbf{i_6}$: taxa efetiva bimestral;

$\mathbf{i_{12}}$: taxa efetiva mensal.

Então $\frac{i}{k}$ produzirá uma taxa efetiva $\mathbf{i_k}$.

Assim, o montante $\mathbf{M_2}$ poderá ser $C(1 + i_2)^2$ ou $C(1 + i)$

$M_2 = C(1 + i_2)^2 = C(1 + i)$

Isso significa que os montantes são iguais porque são produzidos num mesmo período, com taxas equivalentes.

$(1 + i_2)^2 = 1 + i \Rightarrow 1 + i_2 = \sqrt[2]{1+i} \Rightarrow i_2 = \sqrt[2]{1+i} - 1$

$M_3 = C(1 + i_3)^3 = C(1 + i) \Rightarrow (1 + i_3)^3 = 1 + i$

Logo:

$i_3 = \sqrt[3]{1+i} - 1$

Assim, de modo geral, podemos escrever:

$$i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1$$

ou

$$i_k = (1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1$$

em que $\mathbf{i_k}$ é a taxa efetiva, equivalente à taxa **i**, no período **k** de capitalização.

Exercícios resolvidos

8) Qual a taxa semestral equivalente para juros compostos a 10% ao ano?

Solução

Para resolver esse problema, devemos usar a fórmula $i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1$, em que **i** é a taxa anual, equivalente a 10% ou 0,1.

Assim, temos:

$i_2 = \sqrt{1+i} - 1 = \sqrt{1 + 0,1} - 1 = 1,04880 - 1 = 0,048808$ ou

$i_2 \cong 4,88\%$

Resposta: A taxa semestral é de, aproximadamente, 4,88%.

9) Qual a taxa anual equivalente para juros compostos a 7% por bimestre?

Solução

Vamos calcular a taxa anual **i**.

Lembrando que o ano tem 6 bimestres, temos:

$k = 6 \Rightarrow i$: taxa bimestral

$i_6 = 7\% \Rightarrow i_6 = 0{,}07$

Como $i_6 = \sqrt[6]{1+i} - 1 \Rightarrow (i_6 + 1)^6 = 1 + i \Rightarrow (i_6 + 1)^6 - 1 = i \Rightarrow$

$\Rightarrow i = (1 + 0{,}07)^6 - 1$

Consultando a tabela, vem:

$i \cong 1{,}5007304 - 1 = 0{,}5007304$

Resposta: A taxa anual equivalente é de, aproximadamente, 50,07%.

10) Um banco emprestou $ 8 000,00 por um ano, à taxa anual de 18% a.a., com capitalização bimestral. Qual será a taxa efetiva anual e o montante que será devolvido ao final do ano?

Solução

Como a capitalização é bimestral, podemos dizer que $k = \frac{12}{2} = 6$ e $i = 0{,}18$.

Assim, $\frac{i}{k} = \frac{0{,}18}{6} = 0{,}03$ é a taxa bimestral proporcional, mas não equivalente.

Para calcular a $\mathbf{i_{efetiva}}$ (taxa anual efetiva), temos:

$i_6 = \sqrt[6]{1 + i_{efetiva}} - 1 \Rightarrow (i_6 + 1)^6 - 1 = i_{efetiva} \Rightarrow$

$\Rightarrow i_{efetiva} = (1 + 0{,}03)^6 - 1 = 0{,}194$

Portanto, a taxa efetiva será de 19,4% a.a., aproximadamente.

No cálculo do montante a ser devolvido, temos que:

$M = C(1 + i_k)^{k \cdot n}$

em que $n = 1$ ano e $C = 8\,000$.

Daí:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{6}\right)^6$$

Mas $\left(1 + \frac{i}{6}\right)^6 = i_{efetiva} + 1$

Assim, fazendo as substituições convenientes, temos:

$M = C(i_{efetiva} + 1) \cong 8\,000 \cdot (0{,}194 + 1) \cong 9\,552{,}00$

Resposta: O montante a ser devolvido será de, aproximadamente, $ 9 552,00. E a taxa efetiva será de 19,4% a.a., aproximadamente.

Exercícios propostos

16) Dada a taxa de 9% por trimestre, calcule a taxa mensal equivalente de juros compostos.

17) Supondo que um capital de $ 1 200,00 vai ser aplicado à taxa de juros compostos de 15% por trimestre ou 70% ao ano, qual será a melhor aplicação?

18) Um certo capital de $ 2 500,00 foi aplicado por 2 anos, à taxa de 60% ao ano, com capitalização semestral. Calcule o montante e a taxa efetiva.

19) Fiz várias aplicações com cotas iguais de $ 5 000,00 e, para minha organização, coloquei as informações numa tabela, em que:

k = capitalização

k = 1 ⇒ anual

k = 2 ⇒ semestral

k = 4 ⇒ trimestral

k = 6 ⇒ bimestral

k = 12 ⇒ mensal

Observe a tabela:

Aplicação	**Taxa**	**Capitalização**	**Prazo** (em anos)	**Taxa equivalente**	**Montante** (em $)
1	36% a.a.	k = 2	2		
2	60% a.a.	k = 1	1,5		
3	75% a.a.	k = 4	2		
4	50% a.a.	k = 6	3		
5	75% a.a.	k = 12	2		

a) De acordo com os dados apresentados, complete a quinta e sexta colunas da tabela.

Terminando esse ciclo de aplicações, passei a utilizar tabelas semelhantes (já simplificadas na forma de matrizes) para as cotas de $ 8 000,00 e $ 10 000,00.

Para a cota de $ 8 000,00, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 12\%\text{ a.a.} & 6 & 1 & ____ & ____ \\ 2 & 75\%\text{ a.a.} & 12 & 2 & ____ & ____ \\ 3 & 20\%\text{ a.a.} & 4 & 2 & ____ & ____ \end{pmatrix}$$

Para a cota de $ 10 000,00, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 50\%\text{ a.a.} & 2 & 2 & ____ & ____ \\ 2 & 15\%\text{ a.a.} & 1 & 2 & ____ & ____ \\ 3 & 30\%\text{ a.a.} & 12 & 1 & ____ & ____ \end{pmatrix}$$

b) De acordo com os dados apresentados, complete a quinta e sexta colunas das duas matrizes.

20) Pretendo comprar uma passagem de avião daqui a dois anos. Supondo que ela custará $ 50 000,00, quanto deverei aplicar hoje, considerando que a taxa anual de aplicação é de 30% a.a. com capitalização trimestral?

21) Calcule a taxa anual equivalente a 3,5% mensal.

22) Qual é o tempo necessário para que um capital colocado a juros compostos de 100% a.a., capitalizados semestralmente, triplique o seu valor?

23) Considerando uma capitalização semestral, a que taxa devo depositar $ 12 000,00 para receber $ 51 500,00 após um ano e meio?

24) Tendo um capital de $ 60 000,00, apliquei a metade durante 6 meses a juros compostos e à taxa anual de 80%, capitalizados bimestralmente. A outra metade coloquei a juros simples, durante o mesmo período e a uma taxa mensal de 18%. Qual aplicação foi mais rentável?

25) Aplicando $ 100 000,00 a juros compostos de 5% a.m. e $ 80 000,00 a 6% a.m., depois de quanto tempo teremos montantes iguais?

26) Depositando $ 12 000,00 a juros compostos, receberia $ 2 400,00 de juros após três meses. Para retirar o montante de $ 18 000,00, por quanto tempo deveria ficar depositado o capital?

Problemas e testes de concursos

1) (Metrô-SP) Um investidor aplicou uma quantia de $ 20 000,00, à taxa de juros compostos de 10% a.m. Que montante esse capital irá gerar após 3 meses?

a) $ 26 420,00
b) $ 26 520,00
c) $ 26 620,00
d) $ 26 720,00

2) (CEB-DF) Após 4 meses, a aplicação de $ 5 000,00, à taxa de juros compostos de 20% a.m., irá gerar o montante de:

a) $ 10 358,00.
b) $ 10 368,00.
c) $ 10 378,00.
d) $ 10 388,00.

3) (ESAF) Se um capital cresce sucessiva e cumulativamente durante 3 anos, na base de 10% ao ano, seu montante final é:

a) 30% superior ao capital inicial.
b) 130% do valor do capital inicial.
c) 150% do capital inicial, aproximadamente.
d) 133% do capital inicial, aproximadamente.

4) (TC-DF) Um investidor aplicou a quantia de $ 100 000,00, à taxa de juros compostos de 10% a.m. Que montante esse capital irá gerar após 4 meses?

a) $ 140 410,00
b) $ 142 410,00
c) $ 144 410,00
d) $ 146 410,00

5) (Metrô-SP) Que montante será gerado por um capital de $ 2 000,00, aplicado à taxa racional composta de 5% a.m., em 1 ano? Considere que $(1,05)^{12} = 1,79586$.

a) $ 3 291,72
b) $ 3 391,72
c) $ 3 491,72
d) $ 3 591,72

6) (CEB-DF) A caderneta de poupança remunera seus aplicadores à taxa nominal de 6% a.a., capitalizados mensalmente no regime de juros compostos. Qual é o valor do juro obtido pelo capital de $ 80 000,00 durante 2 meses?

a) $ 801,00
b) $ 802,00
c) $ 803,00
d) $ 804,00

7) (BC) A taxa de 30% ao trimestre, com capitalização mensal, corresponde a uma taxa efetiva bimestral de:

a) 20%. b) 21%. c) 22%. d) 23%. e) 24%.

8) (TC-DF) No Brasil as cadernetas de poupança pagam, além da correção monetária, juros compostos à taxa nominal de 6% a.a., com capitalização mensal. Assim, a taxa efetiva bimestral é de:

a) 1,00025%.
b) 1,0025%.
c) 1,025%.
d) 1,25%.

9) (AFTN) A taxa de 40% ao bimestre, com capitalização mensal, é equivalente a uma taxa trimestral de:

a) 60,0%. c) 68,9%. e) 84,4%.
b) 66,6%. d) 72,8%.

10) (AFTN) Uma empresa aplica $ 300,00, à taxa de juros compostos de 4% ao mês, por 10 meses. A taxa que mais se aproxima da taxa proporcional mensal dessa operação é:

a) 4,60%. c) 5,00%. e) 4,80%.
b) 4,40%. d) 5,20%.

11) (TCU) O preço de uma mercadoria é $ 2 400,00, e o comprador tem um mês para efetuar o pagamento. Caso queira pagar à vista, a loja dá um desconto de 20%. O mercado financeiro oferece um rendimento de 35% ao mês. Assinale a alternativa correta.

a) A melhor opção é o pagamento à vista.
b) Não há diferença entre as duas modalidades de pagamento.
c) No pagamento a prazo, o comprador lucra $ 192,00 ao final do mês.
d) No pagamento a prazo, o comprador lucra $ 210,00 ao final do mês.
e) No pagamento a prazo, o comprador lucra $ 252,00 ao final do mês.

12) (AFTN) Um capital de $ 100 000,00 foi depositado por um prazo de 4 trimestres, à taxa de juros de 10% ao trimestre, com correção monetária trimestral igual à inflação. Admitamos que as taxas de inflação trimestrais observadas foram de 10%, 15%, 20% e 25%, respectivamente. A disponibilidade do depositante ao final do terceiro trimestre será de, aproximadamente:

a) $ 123 065,00. c) $ 202 045,00. e) $ 222 045,00.
b) $ 153 065,00. d) $ 212 045,00.

CAPÍTULO 10

DESCONTOS

1. Introdução

Ao fazermos o estudo de descontos simples, diferenciamos o desconto bancário do racional. No primeiro, as taxas incidiam sobre o valor nominal, enquanto, no segundo, o cálculo do desconto era feito com taxas incidindo sobre o valor líquido.

O desconto composto é calculado sempre com taxas sobre o valor nominal.

2. Valor atual

Suponha um título, cujo valor nominal **N** é de $ 10 000,00, resgatável após 6 meses, à taxa mensal de juros compostos de 10% a.m. Qual é o capital que aplicado a essa taxa, durante o mesmo período, resultaria **N**?

O cálculo que devemos fazer é o do montante para juros compostos.

Como $M = C(1 + i)^n$, então $N = C(1 + i)^n$. Mas como $N = 10\,000$, $i = 10\%$ ou 0,1 e $n = 6$ meses, então:

$$10\,000 = C(1 + 0{,}1)^6 \Rightarrow C = \frac{10\,000}{(1 + 0{,}1)^6} \Rightarrow C = \frac{10\,000}{1{,}771561} \cong 5\,644{,}74$$

O capital é de $ 5 644,74, que é chamado de *valor atual* do título.

> *Valor atual* ($\mathbf{V_a}$) de um título de valor nominal **N**, resgatável após um período **n** à taxa **i** de juros compostos, é aquele que aplicado durante o período **n**, à taxa **i**, se transforma em **N**.

Utilizando fórmulas, podemos escrever isso de outra maneira:

$$N = V_a(1 + i)^n \Rightarrow V_a = \frac{N}{(1 + i)^n}$$

em que:

V_a: valor atual

N: valor nominal

n: período

i: taxa a juros compostos

Podemos escrever também:

$$V_a = Nv^n$$

em que $v = \frac{1}{1 + i}$.

Observação: O símbolo **v** representa um valor tabelado. (Consulte a tabela 6 no final do livro.)

3. Desconto composto

De quanto será o desconto que um título de $ 8 000,00, à taxa de 8% a.m., sofre ao ser resgatado dois meses antes do seu vencimento?

Sabemos que N = 8 000. Então, vamos fazer o cálculo do valor atual para o resgate:

$$V_a = Nv^n = 8\,000\left(\frac{1}{1 + 0{,}08}\right)^2 = 8\,000 \cdot 0{,}8573388 \cong 6\,858{,}72$$

Como o valor do título era de $ 8 000,00 e o valor atual é de $ 6 868,72, o desconto será de $ 1 131,28.

Para calcular o desconto composto (D_c), basta determinar a diferença entre o valor nominal e o valor atual.

Assim:

$$D_c = N - V_a$$

Nessa fórmula, **N** é o valor nominal do título e V_a é o valor atual.

A fórmula de desconto composto também pode ser escrita de outra maneira. Veja:

$$D_c = N - V_a$$

Mas como $V_a = Nv^n$, então $D_c = N - Nv^n = N(1 - v^n)$.

Daí, temos:

$$D_c = N(1 - v^n)$$

Exercícios resolvidos

1) Calcular o valor atual de um título de $ 12 000,00, à taxa de 9% a.m., disponível em 8 meses.

Solução

Sabendo que $V_a = Nv^n$ e como $N = 12\,000$, $n = 8$ e $i = 9\%$ ou 0,09, podemos escrever:

$$V_a = \frac{12\,000}{(1 + 0{,}09)^8} = 12\,000 \cdot 0{,}5018663 \cong 6\,022{,}40$$

Resposta: O valor atual é de $ 6 022,40.

2) Calcular os três tipos de descontos possíveis para um título de $ 9 000,00, à taxa de 5% a.m., resgatado 5 meses antes do vencimento.

Solução

Inicialmente, veremos os descontos a juros simples.

a) Desconto bancário:

Sabemos que $D = Nin$. Como $N = 9\,000$, $i = 0{,}05$ e $n = 5$, temos:

$D = 9\,000 \cdot 0{,}05 \cdot 5 = 2\,250$

O desconto bancário é de $ 2 250,00.

b) Desconto racional:

Sabemos que $D_r = Lin$. Nessa fórmula, **L** é o valor líquido do título (nominal − desconto).

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in} = \frac{9\,000 \cdot 0{,}05 \cdot 5}{1 + 0{,}05 \cdot 5} = \frac{2\,250}{1{,}25} = 1\,800$$

O desconto racional é de $ 1 800,00.

Em seguida, faremos o cálculo do desconto composto:

$$D_c = N(1 - v^n) \text{ e } v^n = \frac{1}{(1 + 0{,}05)^5} = 0{,}7835262$$

$$D_c = 9\,000(1 - 0{,}7835262) = 9\,000 \cdot 0{,}2164738$$

$$D_c \cong 1\,948{,}26$$

O desconto composto é de, aproximadamente, $ 1 948,26.

Resposta: O desconto bancário foi de $ 2 250,00, o desconto racional, de $ 1 800,00 e o desconto composto, de $ 1 948,26.

Observação: Você deve ter notado que o *desconto bancário* é o maior que existe, enquanto o *racional* é o menor e o *composto* está entre os dois, desde que seja utilizada a mesma taxa.

3) Uma duplicata, no valor de $ 120 000,00 e com vencimento em 4 anos, por quanto será paga hoje se sofrer um desconto composto de 14% a.a.?

Solução

Sabendo que $V_a = \frac{N}{(1 + i)^n}$ e que $N = 120\,000$, $n = 4$ e $i = 0{,}14$, temos:

$$V_a = \frac{120\,000}{(1 + 0{,}14)^4}$$

Usando logaritmos, vem:

$$\log V_a = \log \frac{120\,000}{(1{,}14)^4} = \log 120\,000 - \log (1{,}14)^4 =$$

$$= \log 120\,000 - 4 \cdot \log 1{,}14 = 5{,}079181 - 4 \cdot 0{,}0569048 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log V_a = 5{,}079181 - 0{,}2276194 = 4{,}8515616 \Rightarrow V_a \cong 71\,049{,}59$$

Resposta: A duplicata será paga por $ 71 049,59.

4) Que taxa de desconto composto sofreu um título de $ 20 000,00 que, pago 5 meses antes do prazo, foi reduzido a $ 14 950,00?

Solução

Como já conhecemos o valor nominal, o valor atual e o período, devemos apenas calcular a taxa.

Sabendo que $V_a = \frac{N}{(1 + i)^n}$ e que $V_a = 14\,950$, $N = 20\,000$ e $n = 5$, temos:

$$14\,950 = \frac{20\,000}{(1 + i)^5} \Rightarrow (1 + i)^5 = \frac{20\,000}{14\,950} \cong 1{,}3378 \cong 1{,}34$$

Usando logaritmo, vem:

$\log (1 + i)^5 = \log 1{,}34 \Rightarrow 5 \cdot \log (1 + i) = \log 1{,}34 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log (1 + i) = \frac{0{,}127105}{5} = 0{,}02542$

Como $\log (1 + i) \cong 0{,}02542$, então $1 + i \cong 1{,}06 \Rightarrow i \cong 0{,}0599$.

Resposta: A taxa é de, aproximadamente, 5,99% a.m.

Observação: $(1 + i)^5 = 1{,}3378$ tem $i \cong 5{,}99\%$, o que pode ser encontrado na tabela 5 por aproximação.

Resolver um problema por meio de logaritmos ou fazendo uso da tabela é uma escolha que deve ser definida de acordo com os valores a serem obtidos. Para isso, é preciso verificar em qual das tabelas (tabela 4 ou 5) haverá uma maior aproximação. No caso de ser necessária uma aproximação ainda mais exata, use o artifício da interpolação.

Exercícios propostos

1) Devo pagar uma duplicata de $ 150 000,00, com vencimento em 3 anos. Qual o valor a ser pago, sabendo que terei um desconto composto de 90% a.a.?

2) A que taxa foi descontada, a juros compostos, uma dívida de $ 70 000,00 que, paga 4 meses antes do vencimento, teve seu valor reduzido para $ 50 000,00?

3) Qual foi o desconto composto obtido para se saldar uma dívida de $ 80 000,00 2 meses antes do vencimento e à taxa de 12% a.m.?

4) Calcule o valor atual de uma duplicata de $ 250 000,00, com prazo de 6 meses de vencimento, à taxa de 10% a.m.

5) Calcule o valor atual de um título de $ 125 000,00, à taxa de 8% a.m., pago 2 meses e 10 dias antes do vencimento.

6) Uma letra de câmbio, paga 3 meses antes do vencimento, foi reduzida à metade de seu valor. Que taxa de desconto composto foi aplicada?

7) Uma letra de câmbio foi paga 4 meses antes do vencimento, com um desconto composto de 9% a.m., tendo se reduzido a $ 75 600,00. Qual era o valor da letra?

8) Um título disponível ao fim de 8 meses foi descontado a juros compostos de 11% a.m., tendo seu valor reduzido a $ 12 700,00. Qual o valor do título?

9) Qual o desconto composto obtido no resgate de um título de $ 85 000,00, 5 meses antes do vencimento, à taxa de 8% a.m.?

10) Em quanto tempo foi antecipado o pagamento de $ 35 000,00, sabendo que, descontado a juros compostos de 7% a.m., seu valor foi reduzido a $ 14 000,00?

11) Devia pagar um título em 23 de junho, mas resolvi adiantar seu pagamento para 16 de abril. Seu valor nominal era de $ 70 000,00 e obtive um desconto composto de 8% a.m. Quanto tive que desembolsar?

12) De posse de algumas letras no valor de $ 80 000,00, com vencimento em 7 meses, quero resgatá-las hoje. Para efetuar tal operação, tive três ofertas:
   a) desconto bancário com taxa de 10%;
   b) desconto racional com taxa de 13%;
   c) desconto composto com taxa de 11,5%.

   Qual será a operação mais vantajosa?

13) Complete a tabela abaixo com os valores necessários.

Valor nominal ($)	**Taxa** (% a.m.)	**Período** (meses)	**Desconto composto** ($)
12 000,00	12	3	.....
16 000,00	10	2	.....
15 000,00	8	.....	12 000,00
.....	10	4	15 000,00
20 000,00	.....	5	16 000,00

14) Um título de $ 25 000,00, descontado 5 meses antes do prazo à taxa de 7% a.m., rendeu o mesmo desconto que outro, descontado 4 meses antes do prazo de vencimento à taxa de 9% a.m. Qual o valor do segundo título?

Problemas e testes de concursos

1) (CEB-DF) Antecipando em dois meses o pagamento de um título, obtive um desconto racional composto, que foi calculado com base na taxa de 20% a.m. Sendo $ 31 104,00 o valor nominal do título, quanto paguei por ele?

a) $ 21 600,00
b) $ 21 700,00
c) $ 21 800,00
d) $ 21 900,00

2) (TC-DF) Uma empresa estabelece um contrato de "leasing" para o arrendamento de um equipamento e recebe como pagamento uma promissória no valor nominal de $ 1 166 400,00, descontada dois meses antes de seu vencimento, à taxa de 8% a.m. Admitindo-se que foi utilizado o sistema de capitalização composta, o valor do desconto racional será de:

a) $ 194 089,00.
b) $ 186 624,00.
c) $ 166 400,00.
d) $ 116 640,00.

3) (TC-DF) Uma empreiteira tomou a quantia de $ 1 000 000,00 emprestada de um banco, por 6 meses, à taxa de juros compostos de 19,9% a.m. No entanto, 1 mês antes do vencimento, a empresa decidiu liquidar a dívida. Qual o valor a ser pago se o banco opera com uma taxa de desconto racional composto de 10% a.m.? (Considere $1{,}199^6 = 2{,}97$.)

a) $ 2 400 000,00
b) $ 2 500 000,00
c) $ 2 600 000,00
d) $ 2 700 000,00

4) (AFTN) Um "commercial paper" com valor de face de $ 1 000 000,00 e vencimento daqui a três anos deve ser resgatado hoje. Sabendo que há uma taxa de juros compostos de 10% ao ano e considerando o desconto racional, obtenha o valor do resgate.

a) $ 751 314,80
b) $ 750 000,00
c) $ 748 573,00
d) $ 729 000,00
e) $ 700 000,00

5) (ESAF) Uma empresa descontou uma duplicata de $ 500 000,00, 60 dias antes do vencimento, sob o regime de desconto racional composto. Admitindo-se que o banco adote a taxa de juros efetiva de 84% a.a., de quanto foi o líquido recebido pela empresa? (Desprezar os centavos no resultado final.)

a) $ 429 304,00
b) $ 440 740,00
c) $ 446 728,00
d) $ 449 785,00
e) $ 451 682,00

6) (AFTN) Uma letra de câmbio no valor de $ 800 000,00, com vencimento daqui a 3 anos, deve ser substituída por duas letras de câmbio de mesmo valor nominal cada uma, mas com vencimentos para daqui a 2 e 5 anos, respectivamente. Calcule o valor nominal das novas letras, sabendo que a taxa de juro composto utilizada é de 8% ao semestre e a taxa de juro composto do desconto é de 10% ao semestre.

a) $ 511 305,00
b) $ 311 305,00
c) $ 433 382,00
d) $ 411 305,00
e) $ 382 433,00

7) (AFTN) Uma empresa tem um compromisso de $ 100 000,00 para ser pago dentro de 30 dias. Para ajustar o seu fluxo de caixa, a empresa propõe ao banco a seguinte forma de pagamento: $ 20 000,00 antecipado, à vista, e dois pagamentos iguais para 60 e 90 dias. Admitindo-se a taxa de juros compostos de 7% ao mês, o valor dessas parcelas deverá ser de:

a) $ 43 473,00.
b) $ 46 725,00.
c) $ 46 830,00.
d) $ 47 396,00.
e) $ 48 377,00.

CAPÍTULO 11

CAPITALIZAÇÃO E AMORTIZAÇÃO

1. Introdução

Certamente, muitos de nós já nos envolvemos em uma das seguintes situações:

- compra de bem de consumo a crédito;
- investimento em poupanças programadas;
- compra de imóvel financiado.

Neste capítulo, veremos como calcular os juros, as parcelas e os montantes envolvidos nessas três operações.

A ação de investirmos periodicamente uma quantia fixa, com taxa de juros fixos e com o objetivo de compor um determinado capital final, é chamada de *capitalização*.

Por *amortização* entendemos a ação de saldar uma dívida por meio de parcelas periódicas, constantes ou não.

Para iniciar nossos estudos, é importante ressaltar que a forma pela qual pagamos ou investimos parcelas periódicas não é sempre a mesma, dependendo principalmente dos vencimentos dessas parcelas. Por esse motivo, estudaremos as *rendas*.

2. Rendas

Chamamos de rendas os capitais que dispomos periodicamente para algum fim. Pagar uma prestação, aplicar numa poupança ou fazer algum investimento são os exemplos mais comuns de rendas.

As rendas podem ser variáveis ou constantes, como no caso das prestações mensais iguais. Agora, interessa-nos de forma especial a classificação das rendas quanto ao vencimento da primeira parcela ou termo. Observe a tabela:

Tipos de renda	Vencimento do primeiro termo	Exemplo
Imediatas	Imediatamente no fim do primeiro período, a contar da época de contrato.	Compra de um bem de consumo qualquer, financiado em prestações mensais, sendo a primeira prestação pagável um mês após a assinatura do contrato.
Antecipadas	Antecipadamente, já na época atual ou com o contrato.	Compra de um bem qualquer, financiado em prestações mensais, sendo a primeira prestação pagável na ocasião do contrato.
Diferidas ou carência	Após um determinado número de períodos, a contar da época de contrato.	Compra de um bem qualquer, financiado em prestações mensais, sendo que a primeira prestação tem seu vencimento marcado para, por exemplo, três meses após a compra.

Neste capítulo estudaremos as operações financeiras envolvendo rendas, sejam elas para pagar uma dívida ou fazer uma poupança.

Toda vez que o problema não deixar explícito o tipo de renda, consideraremos como sendo renda imediata, pois esse é o tipo de renda mais comum.

3. Capitalização composta

Rendas imediatas

Veremos neste item o caso de um investimento efetuado por intermédio de parcelas constantes, sobre as quais incide a mesma taxa.

Vamos supor que uma pessoa coloque em um banco, de forma programada, cinco prestações mensais de $ 100,00, sobre as quais incidirá um juro constante de 8% a.m. Calcularemos o montante ao final da aplicação.

	Primeira parcela	Segunda parcela	Terceira parcela	Quarta parcela	Quinta parcela
jan.	100	—	—	—	—
fev.	$100(1 + 0{,}08)$	100	—	—	—
mar.	$100(1 + 0{,}08)^2$	$100(1 + 0{,}08)$	100	—	—
abr.	$100(1 + 0{,}08)^3$	$100(1 + 0{,}08)^2$	$100(1 + 0{,}08)$	100	—
maio	$100(1 + 0{,}08)^4$	$100(1 + 0{,}08)^3$	$100(1 + 0{,}08)^2$	$100(1 + 0{,}08)$	100

Como podemos observar na tabela apresentada, a prestação de janeiro (que é a primeira parcela) já terá, em fevereiro, se transformado num valor maior devido à incidência do juro de 8%, referente a um mês de aplicação. Em março, a prestação aumentou ainda mais, já que esteve sujeita à aplicação de juros durante dois meses. E assim ocorre sucessivamente até maio, quando então teremos quatro meses de aplicação.

Esse mesmo raciocínio pode ser aplicado às demais parcelas, de modo que para encontrarmos o montante total, ao final de cinco meses, será preciso efetuar a soma:

$$M = 100 + 100(1 + 0{,}08) + 100(1 + 0{,}08)^2 + 100(1 + 0{,}08)^3 + 100(1 + 0{,}08)^4$$

Os termos dessa soma formam uma PG de razão $(1 + 0{,}08)$, o que nos facilitará o cálculo, uma vez que usaremos a expressão:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

Essa expressão nos fornece a somatória de **n** termos de uma PG:

$$M = \frac{\overbrace{100(1 + 0{,}08)^4}^{a_n}\overbrace{(1 + 0{,}08)}^{q} - \overbrace{100}^{a_1}}{\underbrace{(1 + 0{,}08)}_{q} - 1} = \frac{100(1 + 0{,}08)^5 - 100}{0{,}08} =$$

$$= \frac{100[(1 + 0{,}08)^5 - 1]}{0{,}08}$$

Efetuando os cálculos, resulta:

$$M = 100 \cdot 5{,}8666 = 586{,}66$$

O valor 5,8666 é chamado de fator de capitalização.

O montante será, então, de $ 586,66.

No exemplo que acabamos de ver, era conhecida a prestação mensal, mas não o montante. No entanto, esse mesmo raciocínio serve também para os casos em que conhecemos o montante e não a prestação mensal.

Vejamos um exemplo que analisa esse caso.

Qual o valor de cada parcela que uma pessoa deve investir durante 5 meses, à taxa de 6% a.m., para que o seu capital seja de $ 2 000,00 ao final desse período?

	Primeira parcela	Segunda parcela	Terceira parcela	Quarta parcela	Quinta parcela
jan.	C	—	—	—	—
fev.	$C(1 + 0,06)$	C	—	—	—
mar.	$C(1 + 0,06)^2$	$C(1 + 0,06)$	C	—	—
abr.	$C(1 + 0,06)^3$	$C(1 + 0,06)^2$	$C(1 + 0,06)$	C	—
maio	$C(1 + 0,06)^4$	$C(1 + 0,06)^3$	$C(1 + 0,06)^2$	$C(1 + 0,06)$	C

Analisando o quadro, podemos notar que em maio a soma de todas as parcelas já corrigidas deverá ser de $ 2 000,00. Assim:

$$2\,000 = C + C(1 + 0,06) + C(1 + 0,06)^2 + C(1 + 0,06)^3 + C(1 + 0,06)^4$$

Usando a expressão $S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$, temos:

$$2\,000 = \frac{\overbrace{C(1 + 0,06)^4}^{a_n}\ \overbrace{(1 + 0,06)}^{q} - \overbrace{C}^{a_1}}{\underbrace{(1 + 0,06)}_{q} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,000 = \frac{C(1 + 0,06)^5 - C}{0,06} = C\left[\frac{(1 + 0,06)^5 - 1}{0,06}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 2\,000 \cdot \frac{0,06}{(1 + 0,06)^5 - 1}$$

Efetuando os cálculos, obteremos:

$$C = 2\,000 \cdot 0,1774 = 354,80$$

Portanto, a pessoa deverá investir parcelas mensais de $ 354,80, à taxa de 6% a.m., para que obtenha o montante de $ 2 000,00 em cinco meses.

Vamos agora reproduzir esse raciocínio para uma parcela **C**, durante **n** períodos, aplicada a uma taxa **i** de mesmo período e gerando um montante **M**.

	1º	2º	3º	4º	...	n
1º período	C	—	—	—	—	—
2º período	$C(1 + i)$	C	—	—	—	—
3º período	$C(1 + i)^2$	$C(1 + i)$	C	—	—	—
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
n período	$C(1 + i)^{n-1}$	$C(1 + i)^{n-2}$	$C(1 + i)^{n-3}$	$C(1 + i)^{n-4}$	.....	C

$$M = C + \ldots + C(1 + i)^{n-4} + C(1 + i)^{n-3} + C(1 + i)^{n-2} + C(1 + i)^{n-1}$$

Aplicando $S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$, temos:

$$M = \frac{C(1 + i)^{n-1}(1 + i) - C}{(1 + i) - 1} = \frac{C(1 + i)^n - C}{i}$$

$$M = C \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

A expressão $\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$ é internacionalmente conhecida por $S_{n\urcorner i}$, em que se lê: "S n-cantoneira i".

Assim, a fórmula acima pode ser escrita de duas maneiras:

$$M = C \cdot S_{n\urcorner i}$$

ou

$$M \cdot \frac{1}{S_{n\urcorner i}} = C$$

No final deste livro, encontra-se a tabela 7, de $S_{n\urcorner i}$, que utilizaremos para resolver os exercícios.

Exercícios resolvidos

1) Calcular o valor do montante da aplicação de $ 150,00 por 10 meses, a uma taxa mensal de 1%.

Solução

$C = 150$, $n = 10$ e $i = 1\%$

$M = C \cdot s_{\overline{n}|i} = 150 \cdot s_{\overline{10}|1}$

Consultando a tabela 7, obteremos os seguintes valores para esse caso:

$s_{\overline{10}|1} = 10{,}4622125$

Portanto:

$M = 150 \cdot 10{,}4622125 \cong 1\,569{,}33$

Resposta: O montante será de $ 1 569,33.

2) Calcular o valor das prestações mensais que, aplicadas por 1 ano e à taxa de 2% a.m., geram um total capitalizado de $ 50 000,00.

Solução

$M = 50\,000$, $n = 12$ e $i = 2\%$

$$C = \frac{M}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{50\,000}{s_{\overline{12}|2}}$$

Procurando $s_{\overline{12}|2}$ na tabela, encontraremos o número 13,4120897.

$$C = \frac{50\,000}{13{,}4120987} \cong 3\,727{,}98$$

Resposta: As parcelas mensais deverão ser iguais a $ 3 727,98.

3) Na porta de um banco, lê-se a propaganda de um investimento que diz: "Deposite mensalmente $ 100,00 e, em 24 meses, retire $ 3 442,65". Qual é a taxa mensal de juro composto do investimento?

Solução

$M = 3\,442{,}65$, $C = 100$ e $n = 24$

$$M = C \cdot s_{\overline{n}|i} \Rightarrow 3\,442{,}65 = 100 \cdot s_{\overline{24}|i} \Rightarrow \frac{3\,442{,}65}{100} = s_{\overline{24}|i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 34{,}4265 = s_{\overline{24}|i}$$

Recorrendo à tabela $s_{\overline{n}|i}$, para $n = 24$, encontraremos em $i = 3\%$ o valor de 34,4264702, que, nesse caso, é o mais próximo.

Resposta: A taxa é de, aproximadamente, 3% ao mês.

Rendas antecipadas

Já vimos que uma parcela *imediata* e constante **C**, capitalizada durante **n** períodos, com uma taxa **i** de mesmo período, gera um montante **M** dado por:

$$M = C \cdot s_{\overline{n}|i}$$

No caso de capitalizarmos de forma antecipada, isto é, a partir da ocasião do contrato, teríamos o esquema mostrado nesta tabela:

Parcela / Período	Primeira	Segunda	Terceira	.....	Enésima
Primeiro	$C(1 + i)$	———	———	———	———
Segundo	$C(1 + i)^2$	$C(1 + i)$	———	———	———
.....	.....	.....	.....	.....	.....
Enésimo	$C(1 + i)^n$	$C(1 + i)^{n-1}$	$C(1 + i)^{n-2}$	———	$C(1 + i)$

Somando as parcelas corrigidas, obteremos o total capitalizado:

$$M = C(1 + i) + C(1 + i)^2 + \ldots + C(1 + i)^n$$

Aplicando a somatória de PG, vem:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

Temos, então:

$$M = \frac{C(1 + i)^n(1 + i) - C(1 + i)}{(1 + i) - 1} = C(1 + i)\left[\frac{(1 + i)^n}{1} - 1\right]$$

$$M = C_{antecipado} \cdot (1 + i) \cdot s_{\overline{n}|i}$$

Podemos afirmar, assim, que o montante de uma parcela antecipada é o montante de uma parcela imediata multiplicada por $(1 + i)$.

Exercício resolvido

4) Calcular o montante produzido por 12 parcelas de $ 1 000,00 colocadas mensalmente a juros de 3% a.m., sendo a primeira parcela antecipada.

Solução

$C = 1\,000, \quad n = 12 \text{ e } \quad i = 3\%$

$M = C_{antecipado} \cdot (1 + i) \cdot s_{\overline{n}|i} = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}03) \cdot s_{\overline{12}|3} =$

$= 1\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 14{,}1920296$

$M = 14\,617{,}79$

Resposta: Ao final da capitalização, o montante será de $ 14 617,79.

Exercícios propostos

1) Calcule a prestação que deverá ser capitalizada mensalmente, a 5% ao mês, para que se tenha, no final de 18 meses, um montante de $ 30 000,00.

2) Qual será o capital acumulado de 10 parcelas mensais de $ 15 000,00 aplicadas à taxa de 3% ao mês?

3) Uma financiadora oferece títulos de capitalização com juros de 4% a.m. Quanto receberá um investidor em 1 ano se aplicar $ 250,00 por mês?

4) Um banco oferece aos seus clientes uma poupança programada com prazo de 1 ano, à taxa de 2% a.m. Qual deverá ser a quota mensal de um depositante para que ele acumule, ao final do período, um montante de $ 9 000,00?

5) Uma aplicação mensal de $ 3 000,00, em 20 meses, gera um montante de $ 99 200,00. Calcule a taxa mensal aproximada.

6) Quantas mensalidades de $ 2 000,00 serão necessárias para, à taxa de 5% a.m., constituir um capital de $ 43 157,50?

7) Duas pessoas, **A** e **B**, guardam dinheiro. A pessoa **A** guarda mensalmente $ 1 000,00 debaixo de seu colchão e **B** deposita mensalmente $ 1 000,00 numa poupança programada de um banco, que oferece a taxa fixa de 1% a.m. Ao final de um ano, qual será a diferença entre as quantias guardadas por **A** e **B**?

8) Uma pessoa investe mensalmente $ 2 500,00. Depois de 10 meses, verifica que o montante é de $ 34 541,10. Qual foi a taxa mensal utilizada nessa operação?

9) Aplicando mensalmente $ 4 000,00, obtém-se o montante de $ 34 331,88 ao final de 8 meses. Calcule a taxa mensal de juros compostos do investimento.

10) Um banco oferece um investimento no qual incide uma taxa de juros de 3% a.m. sobre as parcelas fixas mensais, mas é descontado 0,6% do total capitalizado. Quanto uma pessoa que aplique 14 parcelas de $ 1 000,00 deverá receber ao final desse investimento?

11) Uma pessoa capitalizará de forma antecipada 10 prestações mensais de $ 1 200,00 a 4% ao mês. Qual será o montante no final da aplicação?

12) Um montante de $ 6 000,00 foi capitalizado em 8 parcelas bimestrais, à taxa de 9% ao bimestre, sendo a primeira parcela capitalizada antecipadamente. Calcule o valor da prestação.

13) Pode-se demonstrar que uma capitalização diferida de **q** períodos com parcelas iguais a **C**, em **n** períodos, gera um montante **M** dado por:

$M = C(S_{\overline{n+q}|i} - S_{\overline{q}|i})$.

Calcule o montante gerado por 12 parcelas mensais iguais de $ 2 000,00 aplicadas a 3% a.m., contados 5 meses após a aplicação.

4. Amortização

Rendas imediatas

Consideraremos aqui o caso de um empréstimo financiado em prestações mensais, com vencimentos a partir do final do primeiro mês. Como exemplo, admitiremos um valor de $ 1 000,00 a ser dividido e pago em 5 parcelas iguais, sobre as quais incidirá uma taxa de juros mensais de 6%.

Ao final dos cinco meses, a soma das parcelas pagas não deverá ser de $ 1 000,00, que era o valor inicial da dívida, mas sim igual a um valor corrigido à base de juros compostos de 6% a.m. Aplicando o mesmo juro a cada prestação, poderemos ter a tabela:

Parcela / Mês	Primeira	Segunda	Terceira	Quarta	Quinta
Primeiro	C	———	———	———	———
Segundo	$C(1 + 0{,}06)$	C	———	———	———
Terceiro	$C(1 + 0{,}06)^2$	$C(1 + 0{,}06)$	C	———	———
Quarto	$C(1 + 0{,}06)^3$	$C(1 + 0{,}06)^2$	$C(1 + 0{,}06)$	C	———
Quinto	$C(1 + 0{,}06)^4$	$C(1 + 0{,}06)^3$	$C(1 + 0{,}06)^2$	$C(1 + 0{,}06)$	C

A soma das parcelas já corrigidas não é igual à dívida inicial, mas sim à dívida corrigida, que seria de $1\,000(1 + 0{,}06)^5$.

Assim, deveremos ter:

$$C + C(1{,}06) + C(1{,}06)^2 + C(1{,}06)^3 + C(1{,}06)^4 = 1\,000(1{,}06)^5$$

Aplicando a fórmula da somatória de PG $\left(S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q - 1}\right)$, teremos:

$$1\,000(1{,}06)^5 = \frac{\overbrace{C(1{,}06)^4}^{a_n}\overbrace{(1{,}06)}^{q} - \overbrace{C}^{a_1}}{\underbrace{1{,}06}_{q} - 1}$$

$$1\,000(1{,}06)^5 = \frac{C[(1{,}06)^5 - 1]}{0{,}06} \Rightarrow \frac{1\,000(1{,}06)^5\,0{,}06}{(1{,}06)^5 - 1} = C$$

$$\Rightarrow C = 1\,000 \cdot 0{,}2373964 \cong 237{,}40$$

Portanto, a fim de saldar a dívida de \$ 1 000,00 em 5 meses, à taxa de 6% a.m. de juros, deveremos pagar uma prestação de \$ 237,40.

Perceba que, apesar de as prestações serem todas iguais a \$ 237,40, a simples multiplicação desse valor pelo número de prestações, que neste caso é 5, não tem como resultado o valor corrigido da dívida $[1\,000(1 + 0{,}06)^5]$. Isso não acontecè porque a primeira prestação de \$ 237,40 tem hoje um valor que não será o mesmo daqui a 5 meses. Essa consideração vale para todas as prestações.

Quando uma dívida vai sendo paga, dizemos que ela está sendo *amortizada*. O tipo de problema que acabamos de discutir é chamado de *amortização constante*, pois as parcelas são sempre as mesmas durante todo o processo.

Vamos estabelecer uma relação entre a parcela periódica **C** e o total a ser amortizado **M**. Observe a tabela:

Parcela / Período	Primeira	Segunda	Terceira	.....	Enésima
Primeiro	C	———	———	———	———
Segundo	$C(1 + i)$	C	———	———	———
Terceiro	$C(1 + i)^2$	$C(1 + i)$	C	———	———
.....	.....	.....	.....	.....	.....
Enésimo	$C(1 + i)^{n-1}$	$C(1 + i)^{n-2}$	$C(1 + i)^{n-3}$	.....	C

Aplicando a somatória de PG aos termos corrigidos no último período, obteremos a dívida corrigida:

$$C + C(1 + i) + C(1 + i)^2 + \ldots + C(1 + i)^{n-2} + C(1 + i)^{n-1} = M(1 + i)^n$$

Como $S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q - 1}$, temos:

$$M(1 + i)^n = \frac{C(1 + i)^{n-1}(1 + i) - C}{(1 + i) - 1} = \frac{C(1 + i)^n - C}{i} =$$

$$= \frac{C[(1 + i)^n - 1]}{i} = \frac{C \cdot (1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$$

O fator $\dfrac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$ recebe o nome de *fator de correção da amortização* e é representado internacionalmente por $\mathbf{a_{n\rceil i}}$. Este símbolo é lido da seguinte forma: "a n-cantoneira i". Essa fórmula pode ser escrita dos seguintes modos:

$$M = C \cdot a_{n\rceil i}$$

$$M \cdot \frac{1}{a_{n\rceil i}} = C$$

Nessas fórmulas, **M** é o total a ser amortizado e **C** é a parcela que periodicamente será amortizada.

No final deste livro, encontram-se as tabelas 8 e 9, para $a_{n\urcorner i}$ e $\frac{1}{a_{n\urcorner i}}$, respectivamente, que utilizamos para resolver os exercícios.

Exercícios resolvidos

5) Qual será o valor da prestação mensal de um financiamento de $ 3 500,00, feito à base de 2% a.m., em 10 prestações?

Solução

$M = 3\,500, \quad i = 2\% \text{ e } \quad n = 10$

$$M \cdot \frac{1}{a_{n\urcorner i}} = C \Rightarrow 3\,500 \cdot \frac{1}{a_{10\urcorner 2}} = C$$

Procurando $\frac{1}{a_{10\urcorner 2}}$ na tabela 9, encontramos o valor 0,1113265

Assim, temos:

$C = 3\,500 \cdot 0{,}1113265 \cong 389{,}64$

Dessa maneira, 10 prestações mensais de $ 389,64 amortizarão uma dívida de $ 3 500,00 em 10 meses a 2% a.m.

Resposta: O valor da prestação mensal será de $ 389,64.

6) Pagando 20 prestações de $ 300,00 num financiamento feito à base de 6% a.m., que dívida estarei amortizando?

Solução

$C = 300, \quad i = 6\% \text{ e } \quad n = 20$

$M = C \cdot a_{n\urcorner i} = 300 \cdot a_{20\urcorner 6}$

Procurando $a_{20\urcorner 6}$ na tabela 8, encontramos o valor 11,4699212.

Portanto:

$M = 300 \cdot 11{,}4699212 = 3\,440{,}98.$

Resposta: Estarei amortizando uma dívida de $ 3 440,98.

7) Comprei um automóvel, cujo preço à vista era de $ 12 000,00, pagando-o em 12 prestações mensais de $ 1 205;54. Qual foi a taxa mensal de juros cobrada no financiamento?

Solução

$M = 12\,000$, $n = 12$ e $C = 1\,205{,}54$

$$M \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = C \Rightarrow 12\,000 \cdot \frac{1}{a_{\overline{12}|i}} = 1\,205{,}54 \Rightarrow \frac{1}{a_{\overline{12}|i}} = 0{,}1004617$$

Procurando $n = 12$ na tabela 9, de $\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$, encontraremos em $i = 3\%$ o valor 0,1004621 que é, nesse caso, o valor mais próximo.

Resposta: A taxa mensal do financiamento foi de 3%.

8) Em quantas prestações mensais de $ 796,80 quitarei uma dívida de $ 10 000,00, se o financiamento foi feito à base de 4% a.m.?

Solução

$M = 10\,000$, $C = 796{,}80$ e $i = 4\%$

Como $M = C \cdot a_{\overline{n}|i}$, temos:

$$10\,000 = 796{,}80 \cdot a_{\overline{n}|4} \Rightarrow \frac{10\,000}{796{,}80} = a_{\overline{n}|4} \Rightarrow a_{\overline{n}|4} = 12{,}5502008$$

Procurando $i = 4$ na tabela de $a_{\overline{n}|i}$, encontraremos em $n = 18$ o fator 12,6592970, que aceitaremos como o mais próximo. Portanto, deverá ser 18 o número de prestações mensais.

Resposta: A dívida será quitada em 18 prestações.

9) Um financiamento de $ 11 000,00 tem duas opções para ser feito: em 12 prestações de $ 1 384,92 ou em 18 prestações de $ 1 015,92. Qual é a opção mais vantajosa para a financiadora?

Solução

Na primeira opção, temos $M = 11\,000$, $C = 1\,384{,}92$ e $n = 12$.

$$M = C \cdot a_{\overline{n}|i} \Rightarrow 11\,000 = 1\,384{,}92 \cdot a_{\overline{12}|i} \Rightarrow \frac{11\,000}{1\,384{,}92} = a_{\overline{12}|i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{\overline{12}|i} \cong 7{,}9426971$$

Procurando $n = 12$ na tabela de $a_{n\urcorner i}$, encontraremos para $i = 7$ o valor 7,9426863, que consideraremos o mais aproximado. Assim, a taxa no primeiro caso é de, aproximadamente, 7% a.m.

Na segunda opção, temos $M = 11\,000$, $C = 1\,015{,}92$ e $n = 18$.

$$M = C \cdot a_{n\urcorner i} \Rightarrow 11\,000 = 1\,015{,}92 \cdot a_{18\urcorner i} \Rightarrow \frac{11\,000}{1\,015{,}92} = a_{18\urcorner i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{18\urcorner i} = 10{,}82762422$$

Procurando $n = 18$ na tabela de $a_{n\urcorner i}$, encontraremos para $i = 6\%$ o fator 10,8276035, que consideraremos o mais aproximado. Assim, a taxa no segundo caso é de 6% a.m. aproximadamente.

Resposta: Para a financiadora é mais vantajosa a primeira opção, pois a taxa é maior.

10) Uma loja vende uma geladeira em 12 prestações mensais de $ 120,55 ou em 24 prestações mensais de $ 76,76. Qual será a forma de financiamento mais vantajosa para o comprador se a taxa de juros for de 3% a.m.?

Solução

Vamos calcular, nos dois casos, o preço à vista da geladeira.

1º caso:

$C = 120{,}55, \quad n = 12$ e $i = 3\%$

$$M = C \cdot a_{n\urcorner i} = 120{,}55 \cdot a_{12\urcorner 3} = 120{,}55 \cdot 9{,}9540040 \cong 1\,199{,}96 \cong 1\,200$$

2º caso:

$C = 76{,}76, \quad n = 24$ e $i = 3\%$

$$M = C \cdot a_{n\urcorner i} = 76{,}76 \cdot a_{24\urcorner 3} = 76{,}76 \cdot 16{,}9355421$$

$$M = 1\,299{,}97 \cong 1\,300$$

Resposta: O primeiro financiamento tem preço à vista menor e é, assim, o melhor para o comprador.

11) Qual é a taxa mensal de um financiamento de $ 13 500,00 a ser pago em 12 prestações de $ 1 800,00?

Solução

$M = 13\,500, \quad C = 1\,800$ e $n = 12$

$$M = C \cdot a_{\overline{n}|i} \Rightarrow 13\,500 = 1\,800 \cdot a_{\overline{12}|i} \Rightarrow \frac{13\,500}{1\,800} = a_{\overline{12}|i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{\overline{12}|i} = 7{,}5$$

Consultando a tabela $a_{\overline{n}|i}$ para n = 12, encontraremos $a_{\overline{12}|8} = 7{,}536078$ e $a_{\overline{12}|9} = 7{,}160725$.

O valor que procuramos está entre esses dois valores. Vamos, então, montar uma regra de três para obter maior precisão.

Diferença de %	**Diferença de valores**
9% − 8% = 1%	7,536078 − 7,160725 = 0,375353
1%	0,375353
x%	7,536078 − 7,5 = 0,036078

$$x = \frac{0{,}036078 \cdot 1}{0{,}375353} \cong 0{,}096\%$$

Resposta: A taxa mensal é de 8,096%.

12) Calcular o valor atual de uma dívida de 8 termos iguais a $ 800,00, sendo a taxa no período de 2%.

Solução

O valor atual é o total da dívida (**M**). Sabendo que C = 800, i = 2 e n = 8, temos:

$$M = C \cdot a_{\overline{n}|i} = 800 \cdot a_{\overline{8}|2} = 800 \cdot 7{,}3254814 \cong 5\,860{,}39$$

Resposta: O valor atual é de $ 5 860,39.

Rendas antecipadas

No caso de termos uma quantia **M** financiada em **n** parcelas através de uma taxa **i**, o valor das parcelas imediatas será dado, como já vimos, por:

$$C = M \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

Se a prestação **C** for antecipada, isto é, pagável já na ocasião do contrato, podemos montar a seguinte tabela:

Período \ Parcela	Primeira	Segunda	Terceira	.....	Enésima
Primeiro	$C(1 + i)$	———	———	———	———
Segundo	$C(1 + i)^2$	$C(1 + i)$	———	———	———
Terceiro	$C(1 + i)^3$	$C(1 + i)^2$	$C(1 + i)$	———	———
.....	.....	.....	.....	.....	.....
Enésimo	$C(1 + i)^n$	$C(1 + i)^{n-1}$	$C(1 + i)^{n-2}$	.....	$C(1 + i)$

Somando as parcelas corrigidas, no enésimo período devemos obter o montante corrigido. Assim:

$$M(1 + i)^n = C(1 + i) + C(1 + i)^2 + \ldots + C(1 + i)^{n-1} + C(1 + i)^n$$

Utilizando a soma de PG iremos obter:

$$M(1 + i)^n = \frac{C(1 + i)^n(1 + i) - C(1 + i)}{(1 + i) - 1}$$

Simplificando:

$$M = (1 + i)C \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Essa expressão relaciona a quantia total a ser amortizada (**M**), a parcela periódica antecipada de amortização (**C**), o número de parcelas (**n**) e a taxa do período (**i**).

Como é possível perceber pela relação obtida, não deveremos encontrar grandes dificuldades em trabalhar com rendas antecipadas, uma vez que o raciocínio básico é o mesmo utilizado para rendas imediatas.

Exercícios resolvidos

13) Calcular a parcela antecipada de um financiamento de $ 6 700,00 feito em 12 parcelas mensais iguais, à taxa de mercado de 1,5%.

Solução

$M = 6\,700, \quad n = 12 \text{ e } \quad i = 1{,}5\%$

$M = (1 + i)C \cdot a_{\overline{n}|i} \Rightarrow 6\,700 = (1 + 0{,}015)C \cdot a_{\overline{12}|1{,}5}$

Precisamos calcular $a_{\overline{12}|1,5}$, visto que não temos esse valor na tabela.

$$a_{\overline{12}|1,5} = \frac{(1 + 0,015)^{12} - 1}{0,015(1 + 0,015)^{12}} = \frac{0,1956182}{0,0179342} = 10,907551$$

$$6\,700 = 1,015C \cdot 10,907551$$

$$C \cong 605,18$$

Resposta: A parcela antecipada do financiamento será de $ 605,18.

14) Qual é o valor atual de uma renda antecipada de 9 parcelas iguais a $ 1 200,00 com taxa de 2,6% no período?

Solução

O valor atual é o total da dívida (**M**). Sabendo que C = 1 200, i = 2,6 e n = 9, temos:

$$M = (1 + i)C \cdot a_{\overline{n}|i} = (1 + 0,026) \cdot 1\,200 \cdot a_{\overline{9}|2,6} =$$

$$= 1,026 \cdot 1\,200 \cdot 7,9334088 \cong 9\,767,61$$

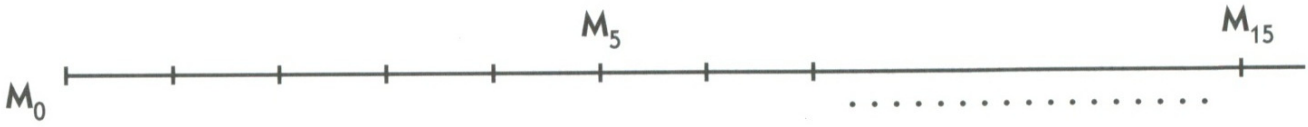
Resposta: O valor atual é de $ 9 767,61.

Rendas diferidas

Como já dissemos anteriormente, as parcelas diferidas são aquelas em que há um período de *carência*, isto é, vencem após um certo período (maior que 1) a contar da ocasião do contrato.

Para entender melhor o que significa isso, vamos considerar o exemplo de um financiamento de $ 4 000,00 à taxa de 3% a.m., a ser pago em 10 prestações, mas diferidas de 5 meses, isto é, que só começarão a ser pagas 5 meses após o contrato.

Observe o esquema:



Visto que nos primeiros cinco meses não haverá parcelas, podemos aceitar que $M_0 = M_{15} - M_5$.

Como $M_5 = C \cdot a_{\overline{5}|3}$ e $M_{15} = C \cdot a_{\overline{15}|3}$, podemos escrever:

$$M_0 = C(a_{\overline{15}|3} - a_{\overline{5}|3}) \Rightarrow 4\,000 = C(11,9379351 - 4,5797072) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\,000 = C \cdot 7,3582279 \Rightarrow C = \frac{4\,000}{7,3582279} \Rightarrow C \cong 543,61$$

Nesse exemplo, as prestações deverão ser de $ 543,61.

De maneira geral, podemos dizer que:

$$M = C(a_{\overline{m}|i} - a_{\overline{k}|i})$$

Nessa expressão, **k** é o período de carência e **m**, o período da última prestação.

Exercícios resolvidos

15) A propaganda de uma grande loja de eletrodomésticos anuncia: "Compre tudo e pague em 10 vezes. Leve hoje e só comece a pagar daqui a 3 meses". Se a taxa de financiamento é de 3% a.m., qual será o valor da prestação de uma geladeira cujo preço à vista é de $ 2 800,00?

Solução

$M = 2\,800$, $i = 3\%$, carência $= 3$ meses e $n = 10$

Assim:

$M = C(a_{\overline{13}|3} - a_{\overline{3}|3}) \Rightarrow 2\,800 = C(a_{\overline{13}|3} - a_{\overline{3}|3})$

Pela tabela, temos:

$2\,800 = C(10{,}6349553 - 2{,}8286114) \Rightarrow 2\,800 = C \cdot 7{,}8063439 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \frac{2\,800}{7{,}8063439} \Rightarrow C \cong 358{,}68$$

Resposta: O valor da prestação deverá ser de, aproximadamente, $ 358,68.

16) Uma amortização constante de 20 parcelas mensais de $ 860,00 tem carência de 6 meses e taxa mensal de 2%. Qual é o valor do financiamento na ocasião do contrato?

Solução

$C = 860$, $i = 2\%$, carência $= 6$ e $n = 20$

Assim:

$M = C(a_{\overline{26}|2} - a_{\overline{6}|2})$

Consultando a tabela, temos:

$M = 860 \cdot (20{,}1210358 - 5{,}6011431) = 860 \cdot 14{,}5198927 \cong 12\,487{,}11$

Resposta: O financiamento é de, aproximadamente, $ 12 487,11.

17) Calcular o valor atual de uma renda mensal de 12 termos iguais a $ 2 000,00, com carência de 4 meses, sendo a taxa de juros de 5% a.m.

Solução

$C = 2\,000$, $i = 5$, $n = 12$ e carência $= 4$

Assim:

$M = C(a_{\overline{16}|5} - a_{\overline{4}|5}) = 2\,000 \cdot (10{,}8377696 - 3{,}5459505) =$

$= 2\,000 \cdot 7{,}2918191 \cong 14\,583{,}64$

Resposta: O valor atual é de $ 14 583,64.

Exercícios propostos

14) Qual é a dívida amortizada com 16 prestações mensais de $ 2 500,00, à taxa de juros de 1% a.m.?

15) Qual é o valor atual de uma renda mensal diferida de 3 meses, a ser paga em 8 parcelas de $ 1 000,00 e à taxa de juros de 3% a.m.?

16) Um empréstimo de $ 45 000,00 deve ser pago em 24 prestações mensais iguais, sendo que a taxa de juros de mercado é de 4% a.m. Qual será o valor da prestação?

17) Um automóvel que custa $ 36 000,00 é comprado à base de 25% de entrada e o restante financiado em 18 meses, sendo a taxa de juros de 2,4% a.m. Calcule o valor da prestação.

18) Uma dívida de $ 20 000,00 deve ser paga em 20 prestações mensais de $ 1 604,80. Calcule o valor da taxa mensal de juros.

19) Uma determinada dívida será amortizada com 15 prestações mensais de $ 2 000,00 à taxa de juros mensais de 2%, sendo que a primeira prestação deve ser paga no ato do empréstimo. Calcule o valor financiado.

20) Calcule o valor atual de uma renda anual de 12 termos iguais a $ 35 000,00 com carência de 2 anos, à taxa de 10% a.a. de juros.

21) A que taxa mensal foi emprestada a quantia de $ 5 000,00, se ela deve ser paga em 16 prestações mensais de $ 368,25?

22) Uma motocicleta no valor de $ 4 000,00 será financiada, sem entrada, em prestações mensais de $ 480,97, à taxa de juros de 3,5% a.m. Qual deverá ser o número de prestações para que toda a dívida seja paga?

23) O comprador de um automóvel no valor de $ 40 000,00 pode escolher dentre dois planos de pagamento:
Plano 1: 20% de entrada e 18 prestações mensais iguais de $ 2 737,50;
Plano 2: 30% de entrada e 24 prestações mensais iguais de $ 2 190,40.
Qual dos dois planos tem a menor taxa de juros mensal?

24) Um anúncio de uma loja X, publicado nos jornais no dia 1º de dezembro dizia: "Compre hoje a geladeira Y por $ 2 800,00, em 12 meses sem entrada, e só comece a pagá-la em março do ano que vem". Qual será a prestação a ser paga se a taxa de juros cobrada pela loja é de 2% a.m.?

25) Um imóvel pode ser comprado à vista ou em 36 prestações mensais de $ 5 000,00. Supondo que a taxa de juros do mercado está em torno de 3% a.m., qual deveria ser o preço à vista do imóvel?

26) A tabela de coeficientes de uma financiadora é a seguinte:
6 meses: 0,1907619
10 meses: 0,1232909
18 meses: 0,0931138
Desta maneira, um financiamento de $ 2 000,00 em 6 meses, por exemplo, será pago com parcelas de 2 000 · 0,1907619 = 381,52. Calcule, em cada prazo, qual é a taxa mensal de juros.

27) Suponha que você seja o vendedor de uma loja de automóveis, cujos planos de pagamento são os seguintes:

Entrada	Saldo
20%	2 vezes sem acréscimo 10 vezes à taxa de mercado 18 vezes à taxa de mercado
30%	3 vezes sem acréscimo 6 vezes à taxa de mercado 12 vezes à taxa de mercado
50%	4 vezes sem acréscimo 10 vezes à taxa de mercado 24 vezes à taxa de mercado

De acordo com esses dados, elabore uma tabela com todas as possibilidades de pagamento de um veículo, cujo valor à vista é de $ 36 000,00. Para tanto, considere que a taxa de juros de mercado é de 3% a.m.

28) Dois sobrados geminados e iguaizinhos são vendidos por corretores diferentes, de acordo com os seguintes planos:

Sobrado 1: $ 150 000,00 de entrada e 24 prestações mensais de $ 12 000,00;

Sobrado 2: $ 250 000,00 de entrada e 18 prestações mensais de $ 10 000,00.

Se a taxa de juros mensal de mercado for de 2,5%, qual dos dois sobrados terá o menor preço à vista?

29) Um imóvel pode ser comprado por $ 2 500 000,00 à vista ou em 4 parcelas mensais de $ 650 000,00. Qual é a melhor opção para o comprador se a taxa mensal de juros do mercado é de 2%?

30) Um comprador oferece ao vendedor de uma loja 6 prestações de $ 429,00 por uma televisão, cujo preço à vista é de $ 2 000,00. No entanto, ele deseja começar a pagar daqui a 3 meses. Se os juros mensais normais da loja forem de 3%, será ou não interessante para o vendedor aceitar essa proposta?

31) Um vendedor oferece a um cliente um aparelho de som no valor de $ 4 500,00, que pode ser pago com 20% de entrada e o restante em 10 prestações mensais de $ 536,51 ou em 18 prestações mensais de $ 384,13. Diz o vendedor que é mais interessante, para quem compra, pagar em 10 meses, pois a taxa de juros é menor. Isso é verdade?

32) Uma pessoa vende um automóvel por $ 45 000,00, recebendo esse valor em 10 prestações mensais de $ 6 114,07. Ao mesmo tempo, compra outro carro no valor de $ 36 000,00, pelo qual paga 10 parcelas mensais de $ 5 365,06. Essa pessoa fez ou não um bom negócio?

33) Uma loja de móveis cobra normalmente 15% do valor da compra no ato do contrato, podendo o saldo ser pago em 6 prestações mensais a contar da entrega do pedido, cujo prazo é estipulado em 2 meses. Qual será o preço à vista de uma compra de móveis, cujas prestações são de $ 1 846,30, sendo a taxa de juros mensal da operação estipulada em 5%?

34) Considerando as taxas mensais de 2%, 2,5% e 3%, elabore uma tabela de coeficientes para o cálculo de 10 prestações mensais de um financiamento, com a primeira prestação sendo paga já no ato do contrato.

Problemas e testes de concursos

1) (AFTN) O pagamento de um empréstimo no valor de 1 000 unidades de valor será efetuado por intermédio de uma anuidade composta por seis prestações semestrais, a uma taxa de 15% ao semestre, sendo que a primeira prestação vencerá seis meses após o recebimento do empréstimo. Qual será o valor da referida prestação? (Considere $a_{6\neg 15} = 3{,}784483$.)

a) 1 000 ÷ 6
b) 1 000 X 2,31306
c) 1 000 ÷ 3,784483
d) 1 000 ÷ 8,753738
e) 1 000 ÷ 2,31306

2) (AFTN) Quanto devo depositar, mensalmente, para obter um montante de $ 12 000,00 ao fim de um ano, sabendo que a taxa mensal de remuneração do capital é de 4% e que o primeiro depósito é feito ao fim do primeiro mês?

a) 12 000,00 ÷ 15,0258055
b) 12 000,00 ÷ (12 X 1,48)
c) 12 000,00 ÷ 9,385074
d) 12 000,00 ÷ (12 X 1,601032)
e) 12 000,00 ÷ 12

3) (AFTN) Uma alternativa de investimento possui um fluxo de caixa com um desembolso de $ 20 000,00 no início do primeiro ano e dez entradas líquidas anuais e consecutivas de $ 10 000,00, inclusive a partir do fim do segundo ano. A uma taxa de 18% ao ano, obtenha o valor atual desse fluxo de caixa ao fim do primeiro ano ($a_{10\neg 18} = 4{,}494086$).

a) 24 940,86
b) 11 363,22
c) 5 830,21
d) 4 940,86
e) 1 340,86

CAPÍTULO 12

EMPRÉSTIMOS E PLANOS DE AMORTIZAÇÃO

1. Introdução

Os empréstimos de grandes quantias por parte das financeiras para compra de imóveis vêm, em geral, acompanhados de prazos dilatados para o pagamento. São os chamados empréstimos a *longo prazo*.

No caso deste tipo de empréstimo é importante estudarmos as maneiras mais comuns de quitação da dívida, ou seja, os sistemas de amortização. Trataremos aqui dos sistemas em que a taxa de juros é constante e calculada sempre sobre o saldo devedor.

O que difere um sistema de amortização do outro é, basicamente, a maneira como são obtidas as parcelas. Elas podem ser constantes, variáveis ou até únicas, sendo compostas sempre por duas partes: juros e amortização propriamente dita.

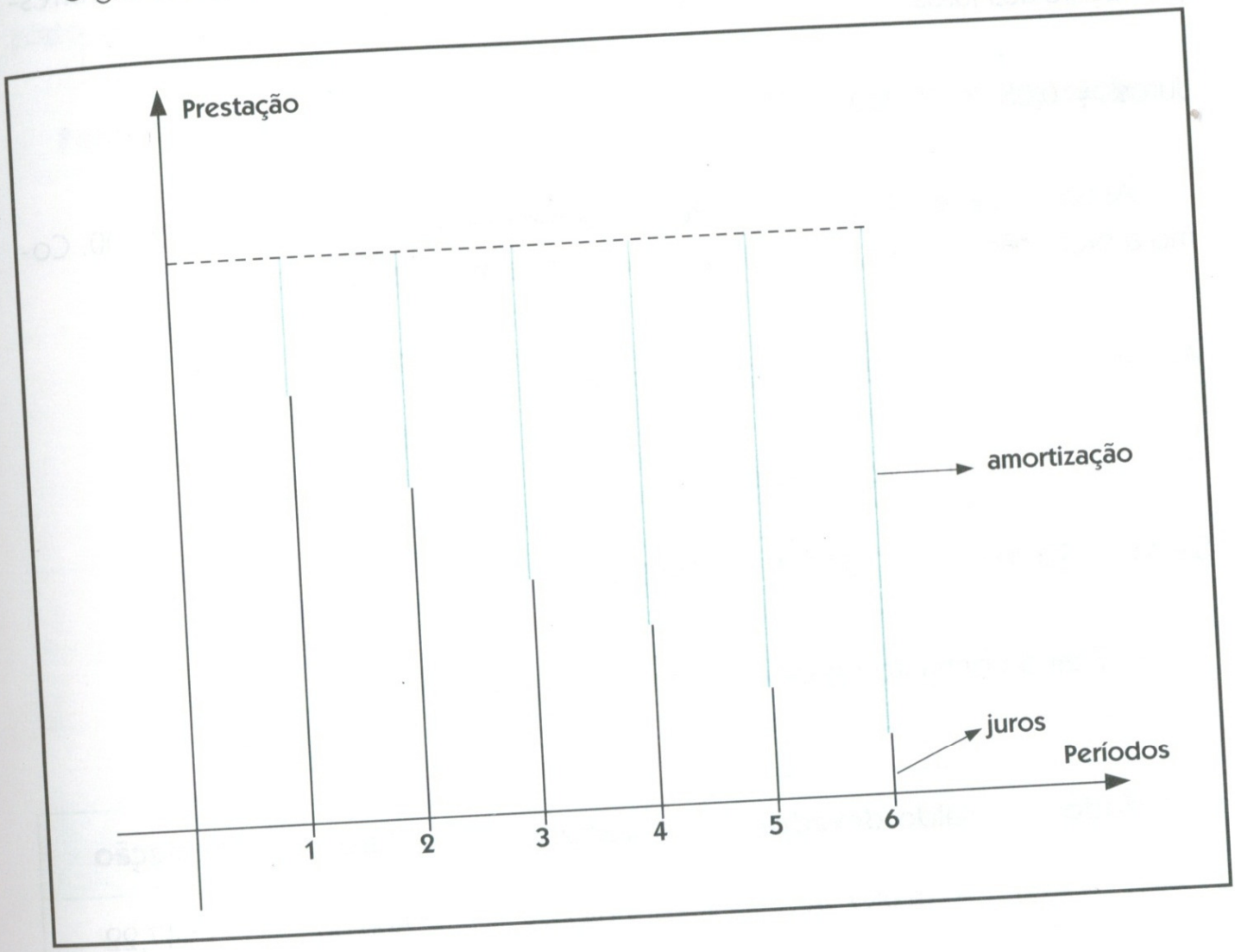
2. Sistema Francês de Amortização

Nesse sistema, as prestações são sempre fixas. O que varia é a sua composição, ou seja, varia a parte correspondente aos juros e a parte correspondente à amortização da dívida inicial. Normalmente, os juros vão diminuindo à medida que os períodos vão decorrendo, ao contrário da amortização, que vai aumentando.

Vejamos, por exemplo, como poderiam ser algumas parcelas de um financiamento desse tipo:

Parcela	Juros	Amortização	Prestação
10ª	792,00	3 049,40	3 841,40
11ª	548,00	3 293,30	3 841,40
12ª	284,60	3 556,80	3 841,40

O gráfico apresentado a seguir esclarece melhor esta situação:



Observe que a prestação fixa é obtida adicionando-se juros e amortização, que variam na ordem inversa. Ou seja, os juros vão diminuindo e a amortização vai aumentando.

Este sistema também pode ser acompanhado de prazo de carência. Nesse caso, os juros podem ser pagos durante o prazo de carência ou capitalizados no saldo devedor.

Sistema Francês sem prazo de carência

Consideremos, como exemplo, um empréstimo de $ 10 000,00 a ser pago, sem carência, em 8 parcelas à base de 5% a.m. de juros.

A parcela constante nesse caso pode ser obtida por meio da fórmula:

$$M \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = C \Rightarrow 10\,000 \cdot \frac{1}{a_{\overline{8}|5}} = C \Rightarrow C \cong 1\,547{,}22$$

Incidindo a taxa de 5% sobre o saldo devedor inicial, teremos a parte correspondente aos juros:

Juros = 0,05 X 10 000 = 500

Assim, a parte referente aos juros na primeira prestação será de $ 500,00. Como a prestação total é de $ 1 547,22, o valor que amortiza a dívida é:

Amortização = 1 547,22 – 500,00 = 1 047,22

Então, o saldo devedor passa a ser:

Saldo = 10 000,00 – 1 047,22 = 8 952,78

Ao final do primeiro período, teremos o seguinte:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
1	8 952,78	1 047,22	500,00	1 547,22

O processo se repete agora para o segundo período:

Juros = 0,05 · 8 952,78 = 447,64

Amortização = 1 547,22 – 447,64 = 1 099,58

Saldo devedor = 8 952,78 – 1 099,58 = 7 853,20

Deste modo, teremos ao final do segundo período a seguinte situação:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	7 853,20	1 099,58	447,64	1 547,22

Repetindo o processo até a quitação total da dívida, obteremos um plano completo, apresentado na tabela que segue:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10 000,00	—	—	—
1	8 952,78	1 047,22	500,00	1 547,22
2	7 853,20	1 099,58	447,64	1 547,22
3	6 698,64	1 154,56	392,66	1 547,22
4	5 486,35	1 212,29	334,93	1 547,22
5	4 213,45	1 272,90	274,32	1 547,22
6	2 876,90	1 336,55	210,67	1 547,22
7	1 473,53	1 403,37	143,85	1 547,22
8	—	1 473,54	73,66	1 547,22
	TOTAL	**10 000,00**	**2 377,73**	**12 377,76**

Podemos observar pela linha *total*, salvo aproximação, que:

Amortização + Juros = Total das prestações

Sistema Francês com prazo de carência e pagamento dos juros

Neste caso, é dado ao devedor um prazo durante o qual ele pagará apenas os juros da dívida, sem amortizá-la durante essa carência.

Tomemos o exemplo de um financiamento de $ 10 000,00 à taxa de 5% a.m., durante 8 meses, com carência de 3 meses. Calculando os juros sobre o saldo devedor inicial, temos:

$$\text{Juros} = 10\,000 \cdot 0{,}05 = 500$$

Este valor será pago nos três primeiros períodos. Desse modo, elaboramos o seguinte esquema:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10 000,00	—	—	—
1	10 000,00	—	500,00	500,00
2	10 000,00	—	500,00	500,00

A partir do mês seguinte, inicia-se a amortização. Agora, a prestação fixa será dada por:

$$C = M \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = 10\,000 \cdot \frac{1}{a_{\overline{8}|5}} \Rightarrow C = 1\,547{,}22$$

Os juros e as amortizações serão, daqui para a frente, calculados do mesmo modo que no caso sem carência. O plano completo será, então, o seguinte:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10 000,00	—	—	—
1	10 000,00	—	500,00	500,00
2	10 000,00	—	500,00	500,00
3	8 952,78	1 047,22	500,00	1 547,22
4	7 853,20	1 099,58	447,64	1 547,22
5	6 698,64	1 154,56	392,66	1 547,22
6	5 486,35	1 212,29	334,93	1 547,22
7	4 213,45	1 272,90	274,32	1 547,22
8	2 876,90	1 336,55	210,67	1 547,22
9	1 473,53	1 403,37	143,85	1 547,22
10	—	1 473,53	73,66	1 547,22
	TOTAL	**10 000,00**	**3 377,73**	**13 377,76**

Sistema Francês com carência e capitalização de juros

Neste caso, durante o período de carência, o devedor não paga os juros da dívida, que são capitalizados no saldo devedor.

Vamos considerar o mesmo exemplo do financiamento de $ 10 000,00, em 8 parcelas mensais, carência de 3 meses, taxa mensal de juros de 5% e capitalização dos juros no saldo devedor.

Os três primeiros períodos podem ser observados no quadro a seguir:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10 000,00	—	—	—
1	10 500,00	—	—	—
2	11 025,00	—	—	—

Perceba que ao saldo devedor foram sendo acrescentados os juros não pagos.

A partir do período seguinte começam a ser cobradas as parcelas referentes à amortização e aos juros. Da soma dessas parcelas resultará a prestação que, agora, deverá ser calculada a partir do saldo devedor atual ($ 11 025,00).

$$C = M \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = 11\,025 \cdot \frac{1}{a_{\overline{8}|5}} = 1\,705{,}81$$

Os juros de 5% no primeiro período serão calculados sobre $ 11 025,00. Assim:

Juros = $11\,025 \cdot 0{,}05 = 551{,}25$

Amortização = prestação − juros = $1\,705{,}81 - 551{,}25 = 1\,154{,}56$

Saldo devedor = saldo devedor anterior − amortização =

= $11\,025{,}00 - 1\,154{,}56 = 9\,870{,}44$

Desta vez, o esquema fica assim:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10 000,00	—	—	—
1	8 793,10	1 206,90	100,00	1 306,90
2	7 574,13	1 218,97	87,93	1 306,90
3	6 342,97	1 231,16	75,74	1 306,90
4	5 099,50	1 243,47	63,43	1 306,90
5	3 843,59	1 255,91	50,99	1 306,90
6	2 575,13	1 268,46	38,44	1 306,90
7	1 293,98	1 281,15	25,75	1 306,90
8	(acerto) 0,02	1 293,96	12,94	1 306,90
	TOTAL	**10 000,00**	**455,20**	**10 455,20**

Neste caso é bom lembrar que a taxa proporcional utilizada de 1,0% não é equivalente a 12% a.a. A taxa equivalente poderia ser calculada por:

$$i_k = \sqrt[k]{1 + i} - 1 \Rightarrow 0{,}01 + 1 = \sqrt[12]{1 + i} \Rightarrow (1{,}01)^{12} - 1 = i \Rightarrow$$

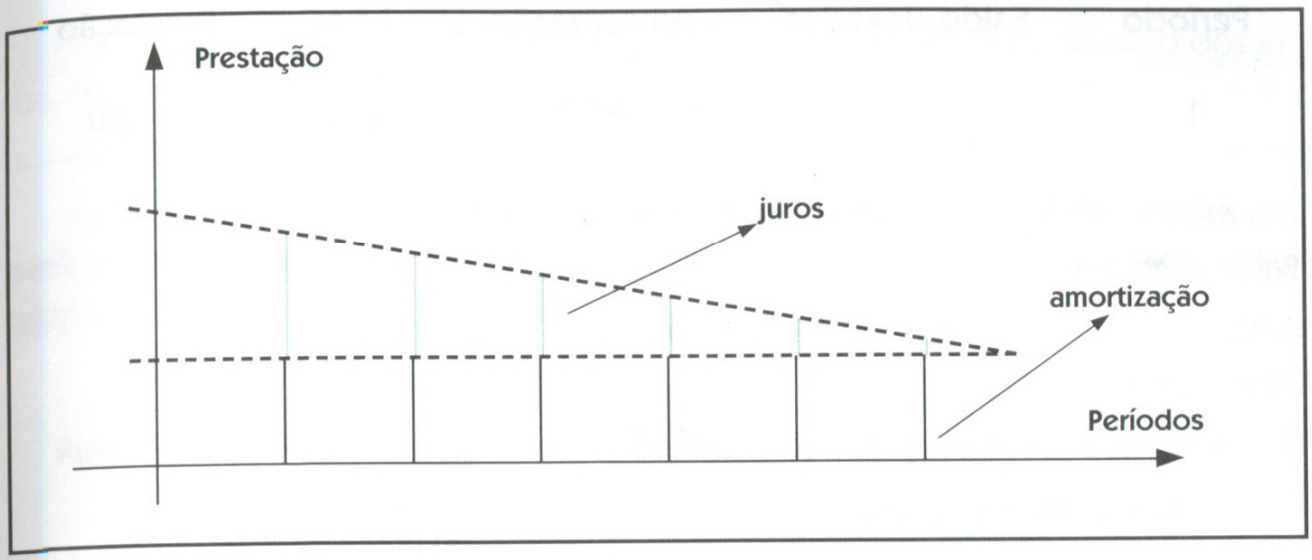
$$\Rightarrow i = 0{,}126825$$

Deste modo, a taxa equivalente anual do financiamento é de, aproximadamente, 12,68% a.a.

4. Sistema de Amortização Constante (SAC) ou Sistema Hamburguês

Neste caso, as prestações são variáveis, a amortização é fixa e os juros, em geral, vão diminuindo à medida que os períodos vão decorrendo.

O gráfico apresentado a seguir esclarece melhor esta situação:



Observe que os juros e as prestações são funções do 1º grau.

SAC sem prazo de carência

Vamos supor um financiamento de $ 2 000,00 à taxa de 3% a.m., com um prazo de 8 meses.

A parcela fixa da amortização é obtida dividindo o valor financiado ($ 2 000,00) pelo número de prestações. Como no financiamento que tomamos como exemplo o número de prestações é 8, temos:

$$\frac{2\,000}{8} = 250$$

A parcela de juros vai variar em função do saldo devedor, tomado no período anterior.

Assim, elaboramos os cálculos referentes à primeira parcela:

Saldo devedor = 2 000

Juros = 2 000 · 0,03 = 60

Amortização = 250

Prestação = 250 + 60 = 310

Então, ao final do período, teremos:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
1	1 750,00	250,00	60,00	310,00

Agora, vamos fazer os cálculos referentes à segunda parcela:

Saldo devedor = 1 750

Juros = 1 750 · 0,03 = 52,50

Amortização = 250

Prestação = 250 + 52,50 = 302,50

Ao final desse período teremos:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
2	1 500,00	250,00	52,50	302,50

Repetindo esse processo até a quitação total da dívida, iremos obter o seguinte plano:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	2 000,00	—	—	—
1	1 750,00	250,00	60,00	310,00
2	1 500,00	250,00	52,50	302,50
3	1 250,00	250,00	45,00	295,00
4	1 000,00	250,00	37,50	287,50
5	750,00	250,00	30,00	280,00
6	500,00	250,00	22,50	272,50
7	250,00	250,00	15,00	265,00
8	—	250,00	7,50	257,50
	TOTAL	**2 000,00**	**270,00**	**2 270,00**

SAC com prazo de carência e pagamento de juros

Neste caso, durante o período de carência é feito apenas o pagamento dos juros, não havendo nenhuma amortização.

Vejamos um exemplo:

Consideremos um financiamento de $ 2 000,00, à taxa de 8% a.m., com um período de carência de 3 meses. O plano de amortização estará de acordo com a tabela:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	2 000,00	—	—	—
1	2 000,00	—	60,00	60,00
2	2 000,00	—	60,00	60,00
3	1 750,00	250,00	60,00	310,00
4	1 500,00	250,00	52,50	302,50
5	1 250,00	250,00	45,00	295,00
6	1 000,00	250,00	37,50	287,50
7	750,00	250,00	30,00	280,00
8	500,00	250,00	22,50	272,50
9	250,00	250,00	15,00	265,00
10	—	250,00	7,50	257,50
	TOTAL	**2 000,00**	**390,00**	**2 390,00**

SAC com prazo de carência e juros capitalizados no saldo

Neste caso, o devedor não paga absolutamente nada durante a carência, pois os juros desse período vão servir para aumentar o saldo devedor.

Exemplo:

Para o financiamento de $ 2 000,00 à taxa de 3% a.m., durante 8 meses e com um período de carência de 3 meses, podemos começar calculando o saldo capitalizado. Assim, depois de um período, temos:

$$\text{Saldo}_1 = 2\,000 \cdot 1{,}03 = 2\,060$$

E, depois de dois períodos:

$$\text{Saldo}_2 = 2\,060 \cdot 1{,}03 = 2\,121{,}80$$

Para calcular a parcela fixa de amortização é necessário dividir 2 121,80 por 8.

$$\frac{2\,121{,}80}{8} = 265{,}23$$

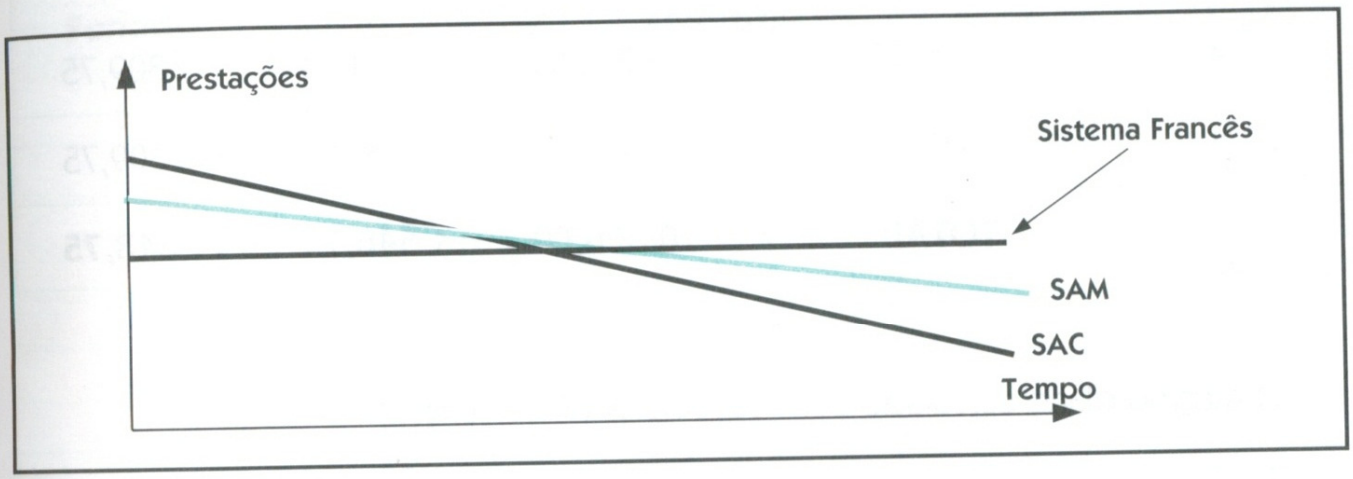
Daqui para a frente, o processo é o mesmo. A tabela com todo o plano deverá ficar assim:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	2 000,00	—	—	—
1	2 060,00	—	—	—
2	2 121,80	—	—	—
3	1 856,57	265,23	63,65	328,88
4	1 591,34	265,23	55,70	320,93
5	1 326,11	265,23	47,74	312,97
6	1 060,88	265,23	39,78	305,01
7	795,65	265,23	31,83	297,06
8	530,42	265,23	23,87	289,10
9	265,19	265,23	15,91	281,14
10	—	265,19	7,96	273,15
	TOTAL	**2 121,80**	**286,44**	**2 408,24**

Observação: Comparando as tabelas dos planos de carência com pagamento ou não dos juros no período, é possível perceber que se paga mais usando o segundo sistema. Isso ocorre porque o que deveria ser juro passa a ser principal.

5. Sistema de Amortização Misto (SAM)

Este é um sistema mais moderno, que não apresenta nenhuma dificuldade teórica em relação aos que já foram estudados, uma vez que ele é simplesmente a média aritmética entre o Sistema Francês de Amortização e o SAC. O gráfico a seguir compara a evolução das prestações nesses três sistemas.



Suponha dois planos de financiamento de $ 10 000,00 em 5 meses, à taxa de 5% a.m., primeiro pelo SAC e depois pelo Sistema Francês.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10 000,00	—	—	—
1	8 000,00	2 000,00	500,00	2 500,00
2	6 000,00	2 000,00	400,00	2 400,00
3	4 000,00	2 000,00	300,00	2 300,00
4	2 000,00	2 000,00	200,00	2 200,00
5	—	2 000,00	100,00	2 100,00
	TOTAL	**10 000,00**	**1 500,00**	**11 500,00**

SISTEMA FRANCÊS				
Período	**Saldo devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
0	10 000,00	—	—	—
1	8 190,25	1 809,75	500,00	2 309,75
2	6 290,01	1 900,24	409,51	2 309,75
3	4 294,76	1 995,25	314,50	2 309,75
4	2 199,75	2 095,01	214,74	2 309,75
5	—	2 199,75	109,99	2 309,75
	TOTAL	**10 000,00**	**1 548,74**	**11 548,75**

O mesmo plano calculado com base no SAM ficaria assim:

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO (SAM)				
Período	**Saldo devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
0	10 000,00	—	—	—
1	8 095,20	1 904,80	500,00	2 404,88
2	6 145,08	1 950,12	404,76	2 354,88
3	4 147,45	1 997,63	307,25	2 304,88
4	2 099,94	2 047,51	207,37	2 254,88
5	—	2 099,94	105,00	2 204,88
	TOTAL	**10 000,00**	**1 524,38**	**11 524,40**

Perceba que, tanto pelas prestações como pelos juros ou pelo saldo devedor, em cada período os valores no SAM são, com exceção da aproximação, a média aritmética entre o valor do SAC e o do Sistema Francês.

6. Sistema Americano

Neste sistema, a devolução do dinheiro emprestado, ao final da carência, é feita numa única parcela. Os juros podem ser pagos pelo devedor de duas maneiras: durante a carência ou capitalizados no principal.

Juros pagos na carência

Vamos supor um empréstimo de $ 2 000,00 à taxa de 3% a.m., durante 8 meses. O plano ficaria assim:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	2 000,00	—	—	—
1	2 000,00	—	60,00	60,00
2	2 000,00	—	60,00	60,00
3	2 000,00	—	60,00	60,00
4	2 000,00	—	60,00	60,00
5	2 000,00	—	60,00	60,00
6	2 000,00	—	60,00	60,00
7	2 000,00	—	60,00	60,00
8	—	2 000,00	60,00	2 060,00
	TOTAL	**2 000,00**	**480,00**	**2 480,00**

Juros capitalizados no saldo devedor

Tomando o exemplo anterior, teremos neste caso:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	2 000,00	—	—	—
1	2 060,00	—	—	—
2	2 121,80	—	—	—
3	2 185,45	—	—	—
4	2 251,02	—	—	—
5	2 318,55	—	—	—
6	2 388,10	—	—	—
7	2 459,75	—	—	—
8	—	2 000,00	533,54	2 533,54
	TOTAL	**2 000,00**	**533,54**	**2 533,54**

7. Plano livre de amortização

Conhecendo os princípios que orientam cada sistema, você poderá montar — após um entendimento entre credor e devedor ou mutuário — o sistema financeiro de amortização que desejar.

Vejamos um exemplo:

Construir o plano de um financiamento de $ 2 000,00 a 10% a.m., com amortização a ser feita por meio de quatro parcelas bimestrais, a saber:

- primeira = $ 500,00
- segunda = $ 400,00
- terceira = $ 600,00
- quarta = $ 500,00

Como são bimestrais, os juros sobre o saldo devedor serão calculados da seguinte maneira:

- após um período:

$$2\,000 \cdot 0{,}1 = 200$$
$$200 \cdot 0{,}1 = 20$$
$$J = 200 + 220 = 420$$

- após dois períodos:

$$1\,500 \cdot 0{,}1 = 150$$
$$150 \cdot 0{,}1 = 15$$
$$J = 150 + 165 = 315$$

No quadro a seguir, poderemos observar o plano completo:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	2 000,00	—	—	—
1	1 500,00	500,00	420,00	920,00
2	1 100,00	400,00	315,00	715,00
3	500,00	600,00	231,00	831,00
4	—	500,00	105,00	605,00
	TOTAL	**2 000,00**	**1 071,00**	**3 071,00**

Exercícios propostos

1) Um banco financia $ 5 000,00 a um cliente, com base na tabela Price e a juros de 15% a.a., para serem devolvidos em 10 meses. Construa o plano de amortização dessa dívida.

2) Um empréstimo de $ 15 000,00 pelo Sistema Francês de Amortização deve ser pago em 1 ano, sem carência, à base de 4% a.m. de juros. Construa o plano de amortização para esse caso.

3) Um carro no valor de $ 40 000,00 é comprado, sem entrada, para ser pago em 8 meses, com carência de 2 meses, à base de 9% a.m. de juros, capitalizados durante a carência. Sabendo que o financiamento foi feito pelo SAC, monte o plano de amortização.

4) Um empréstimo de $ 30 000,00 deve ser pago em 4 parcelas trimestrais iguais, com juros de 10% em cada trimestre. Construa o plano de amortização.

5) Um banco empresta $ 20 000,00 a um cliente, nas seguintes condições:
   - carência de 4 meses;
   - pagamento de juros durante a carência;
   - taxa mensal de 7% para o financiamento;
   - 1 ano de prazo;
   - Sistema Francês de Amortização.

   Baseando-se nesses dados, construa o plano de pagamento para esse caso.

6) Um financiamento de $ 50 000,00 é feito, sem prazo de carência, à taxa de 20% a.a. (tabela Price), devendo ser devolvido em 5 prestações mensais. Monte o plano de financiamento.

7) Um empréstimo de $ 10 000,00, que deverá ser devolvido após 4 meses, chega às mãos do cliente já com um desconto de 2% dos custos bancários com a operação. Monte o plano de pagamento, sabendo que os juros de 7,5% a.m. serão pagos ao final do prazo de devolução.

8) Construa o plano de amortização de um financiamento de $ 20 000,00 feito pelo SAM, cujo prazo é de 6 meses e com juros mensais de 5%.

9) Qual será a primeira das 10 prestações de um financiamento de $ 13 500,00 à taxa mensal de 6%, com carência de 5 meses e juros capitalizados pelo Sistema Francês?

10) Um banco libera um empréstimo de $ 30 000,00 a um cliente, nas seguintes condições:

- $ 10 000,00 no ato do contrato, $ 10 000,00 depois de 3 meses do contrato e $ 10 000,00 após 6 meses do contrato;
- pagamento de parcelas mensais à base de 8% de juros sobre o saldo devedor, iniciado após 1 mês da assinatura do contrato;
- SAC;
- prazo de 10 meses.

De acordo com esses dados, construa o plano do financiamento.

TESTES E QUESTÕES DE VESTIBULARES

1) (Fuvest-SP) Se $\log_{10} 8 = a$, então $\log_{10} 5$ vale:

a) a^3. b) $5a - 1$. c) $\frac{2a}{3}$. d) $1 + \frac{a}{3}$. e) $1 - \frac{a}{3}$.

2) (Unicamp-SP) Considere que certo país troca de moeda cada vez que a inflação acumulada atinge a cifra de 900%. A nova moeda vale sempre 1 000 vezes a antiga. Com uma inflação de 25% ao mês, em quantos meses esse país trocará de moeda? (Dado: $\log_{10} 2 = 0{,}301$.)

3) (Vunesp-SP) Seja $x = 2^{1\,000}$. Sabendo que $\log_{10} 2$ é aproximadamente igual a 0,30103, pode-se afirmar que o número de algarismos de **x** é:

a) 300. b) 301. c) 302. d) 1 000. e) 2 000.

4) (UFMG) A quantia de $ 15 000,00 é emprestada à taxa de juros de 20% ao mês. Aplicando-se juros compostos, o valor que deverá ser pago para quitação da dívida após três meses é de:

a) $ 24 000,00. c) $ 40 920,00. e) $ 48 000,00.

b) $ 25 920,00. d) $ 42 000,00.

5) (Unicamp-SP) Suponha que todos os preços venham subindo 30% ao mês nos últimos meses e continuem assim nos próximos meses. Calcule:

a) quanto custará, daqui a 60 dias, um objeto que hoje custa $ 27 300,00.

b) quanto custava esse mesmo objeto há um mês.

6) (FGV-SP) Um terreno vale hoje **A** reais e esse valor fica 20% maior a cada ano que passa (em relação ao valor de um ano atrás).

a) Qual será o seu valor daqui a **n** anos? Qual a valorização ao longo do enésimo ano expressa em reais?

b) Daqui a quantos anos, aproximadamente, o valor do terreno será triplicado?

7) (Fuvest-SP) Atualmente, 50% das gaivotas de certa região são brancas e 50% são cinzentas. Se a população da espécie branca aumentar 40% ao ano e a da

espécie cinzenta, 80%, qual será a porcentagem de gaivotas brancas, aproximadamente, daqui a dois anos?

a) 50% b) 38% c) 26% d) 14% e) 9%

8) (Fuvest-SP) O preço de certa mercadoria sofre anualmente um acréscimo de 100%. Supondo que o preço atual seja $ 100,00, daqui a três anos o preço será de:

a) $ 300,00.
b) $ 400,00.
c) $ 600,00.
d) $ 800,00.
e) $ 1 000,00.

9) (Fuvest-SP) No dia 1º de setembro, foi aberta uma caderneta de poupança e depositada uma quantia **x**. No dia 1º de dezembro do mesmo ano o saldo era de $ 665 500,00. Sabendo que, entre juros e correção monetária, a caderneta rendeu 10% ao mês, qual era a quantia **x**?

a) $ 650 000,00
b) $ 600 000,00
c) $ 550 000,00
d) $ 500 000,00
e) $ 450 000,00

10) (Fuvest-SP) Um país contraiu, em 1829, um empréstimo de 1 milhão de dólares para pagar em cem anos, à taxa de 9% ao ano. Por problemas na balança comercial, nada foi pago até hoje e a dívida foi sendo "rolada", com capitalização anual de juros. Qual dos valores abaixo está mais próximo do valor da dívida em 1989? (Para os cálculos adote $(1,09)^8 \cong 2$.)

a) 14 milhões de dólares
b) 500 milhões de dólares
c) 1 bilhão de dólares
d) 80 bilhões de dólares
e) 1 trilhão de dólares

11) (Fuvest-SP) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui 30% em relação ao ano anterior. Se **v** for o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo ano será de:

a) $(0,7)^7 \cdot v$.
b) $(0,3)^7 \cdot v$.
c) $(0,7)^8 \cdot v$.
d) $(0,3)^8 \cdot v$.
e) $(0,3)^9 \cdot v$.

12) (Unicamp-SP) Um fabricante de televisores oferece como "vantagem" a devolução do dinheiro pago pelo seus produtos dois anos após a compra. Sabe-se que com uma inflação de 900% os preços das mercadorias sobem, em um ano, dez vezes o seu valor original. Supondo uma inflação anual de 900% nesses dois anos, se em vez de devolver o dinheiro o fabricante desse, no ato da compra, um desconto equivalente ao dinheiro a ser devolvido, de quanto por cento deveria ser esse desconto?

13) (Vunesp-SP) Se a taxa de inflação mensal for de 10% durante 12 meses seguidos, então a taxa de inflação anual durante esses 12 meses será de:

a) 120%.
b) $100[(1,2)^{10} - 1]\%$.
c) $100[(1,1)^{12} - 1]\%$.
d) 313%.
e) $100(1,1)^{12}\%$.

14) (PUC-SP) A caixa beneficente de uma entidade rende, a cada mês, 10% sobre o saldo do mês anterior. Se no início de um mês o saldo era **x**, e considerando que não haja nenhuma retirada, depois de 4 meses o saldo será de:

a) $\left(\frac{11}{10}\right)^4 x$.
b) $\left(\frac{11}{10}\right)^3 x$.
c) $x + \left(\frac{11}{10}\right)^4 x$.
d) $x + \left(\frac{11}{10}\right) x$.
e) $x + \left(\frac{1}{10}\right) x$.

15) (FGV-SP) Uma indústria está produzindo atualmente 100 000 unidades de um certo produto. Quantas unidades estará produzindo ao final de 4 anos, sabendo que o aumento anual da produção é de 10%?

a) 140 000
b) 146 410
c) 146 000
d) 145 000
e) 142 000

16) (PUC-SP) Supondo uma taxa de inflação de 20% ao ano, os preços deverão dobrar em aproximadamente:

a) 1 ano.
b) 2 anos.
c) 3 anos.
d) 4 anos.
e) 5 anos.

17) (FGV-SP) Uma pessoa deposita \$ 50 000,00 na "Caderneta de Poupança Futuro Feliz". Trimestralmente são creditados juros de 10% sobre o saldo. Admitindo que não houve nenhuma retirada, o valor dos juros, após um ano de depósito, será de:

a) \$ 20 000,00.
b) 40%.
c) \$ 20 000,00, ou seja, 40%.
d) \$ 73 205,00.
e) aproximadamente \$ 23 000,00.

18) (FGV-SP) Um certo automóvel desvaloriza-se à razão de 25% ao ano. A partir de hoje, daqui a quantos anos ele valerá metade do que vale atualmente? Adote $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$.

a) 3 anos
b) 2,5 anos
c) 2 anos
d) 4,5 anos
e) 6 anos

19) (PUC-SP) A população de certo município foi de 120 000 habitantes em 1994. Sabendo que essa população vem crescendo a uma taxa de 3% ao ano, a melhor aproximação para o número total de habitantes desse município, em 1997, será:

a) 127 308.
b) 130 800.
c) 131 127.
d) 135 061.
e) impossível de calcular.

20) (FGV-SP) Uma pessoa deseja colocar mensalmente, durante 5 meses seguidos, uma quantia fixa num investimento que rende 6% ao mês. Desse modo calcula ter o montante de $ 2 000,00 ao final do período. Calcule a quantia fixa que essa pessoa deverá depositar.

TABELAS

TABELA 1 — CONTAGEM DOS DIAS

Dia do mês	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Maio	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.	Dia do mês
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	—	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30	—	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31	—	90	—	151	—	212	243	—	304	—	365	31

TABELA 2 — DIVISORES FIXOS

Valores da expressão $\Delta = \frac{360}{i}$; ano comercial e taxa anual.

Taxa (%)	Δ	Taxa (%)	Δ	Taxa (%)	Δ
5	7 200	40	900	75	480
10	3 600	45	800	80	450
15	2 400	50	720	85	423,53
20	1 800	55	654,55	90	400
25	1 440	60	600	95	378,95
30	1 200	65	553,85	100	360
35	1 028,57	70	514,29	105	342,86

TABELA 3 — JUROS SIMPLES

Período diário	Taxa mensal							
	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%
1	0,0020	0,0023	0,0027	0,0030	0,0033	0,0037	0,0040	0,0043
2	0,0040	0,0047	0,0053	0,0060	0,0067	0,0073	0,0080	0,0087
3	0,0060	0,0070	0,0080	0,0090	0,0100	0,0110	0,0120	0,0130
4	0,0080	0,0093	0,0107	0,0120	0,0133	0,0147	0,0160	0,0173
5	0,0100	0,0117	0,0133	0,0150	0,0167	0,0183	0,0200	0,0217
6	0,0120	0,0140	0,0159	0,0180	0,0200	0,0220	0,0240	0,0260
7	0,0140	0,0163	0,0187	0,0210	0,0233	0,0257	0,0280	0,0303
8	0,0160	0,0187	0,0213	0,0240	0,0267	0,0293	0,0320	0,0347
9	0,0180	0,0210	0,0239	0,0270	0,0300	0,0330	0,0360	0,0390
10	0,0200	0,0233	0,0266	0,0300	0,0333	0,0367	0,0400	0,0433
11	0,0220	0,0257	0,0293	0,0330	0,0367	0,0403	0,0440	0,0477
12	0,0240	0,0280	0,0319	0,0360	0,0400	0,0440	0,0480	0,0520
13	0,0260	0,0303	0,0347	0,0390	0,0433	0,0477	0,0520	0,0563
14	0,0280	0,0327	0,0373	0,0420	0,0467	0,0513	0,0560	0,0607
15	0,0300	0,0350	0,0399	0,0450	0,0500	0,0550	0,0600	0,0650
16	0,0320	0,0373	0,0427	0,0480	0,0533	0,0587	0,0640	0,0693
17	0,0340	0,0397	0,0453	0,0510	0,0567	0,0623	0,0680	0,0737
18	0,0360	0,0420	0,0478	0,0540	0,0600	0,0660	0,0720	0,0780
19	0,0380	0,0443	0,0507	0,0570	0,0633	0,0697	0,0760	0,0823
20	0,0400	0,0467	0,0532	0,0600	0,0667	0,0733	0,0800	0,0867
21	0,0420	0,0490	0,0561	0,0630	0,0700	0,0770	0,0840	0,0910
22	0,0440	0,0513	0,0586	0,0660	0,0733	0,0807	0,0880	0,0953
23	0,0460	0,0537	0,0613	0,0690	0,0767	0,0843	0,0920	0,0997
24	0,0480	0,0560	0,0640	0,0720	0,0800	0,0880	0,0960	0,1040
25	0,0500	0,0583	0,0666	0,0750	0,0833	0,0917	0,1000	0,1083
26	0,0520	0,0607	0,0694	0,0780	0,0867	0,0953	0,1040	0,1127
27	0,0540	0,0630	0,0720	0,0810	0,0900	0,0990	0,1080	0,1170
28	0,0560	0,0653	0,0747	0,0840	0,0933	0,1027	0,1120	0,1213
29	0,0580	0,0677	0,0773	0,0870	0,0967	0,1063	0,1160	0,1257
30	0,0600	0,0700	0,0800	0,0900	0,1000	0,1100	0,1200	0,1300

TABELA 4 — TÁBUA DE LOGARITMOS

N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa
		50	**69897**	**100**	**00000**	**150**	**17609**	**200**	**30103**	**250**	**39794**	**300**	**47712**	**350**	**54407**	**400**	**60206**	**450**	**65321**
1	00000	51	70757	101	00432	151	17898	201	30320	251	39967	301	47857	351	54531	401	60314	451	65418
2	30103	52	71600	102	00860	152	18184	202	30535	252	40140	302	48001	352	54654	402	60423	452	65514
3	47712	53	72428	103	01284	153	18469	203	30750	253	40312	303	48144	353	54777	403	60531	453	65610
4	60206	54	73239	104	01703	154	18752	204	30963	254	40483	304	48287	354	54900	404	60638	454	65706
5	69897	55	74036	105	02119	155	19033	205	31175	255	40654	305	48430	355	55023	405	60746	455	65801
6	77815	56	74819	106	02531	156	19312	206	31387	256	40824	306	48572	356	55145	406	60853	456	65896
7	84510	57	75587	107	02938	157	19590	207	31597	257	40993	307	48714	357	55267	407	60959	457	65992
8	90309	58	76343	108	03342	158	19866	208	31806	258	41162	308	48855	358	55388	408	61066	458	66087
9	95424	59	77085	109	03743	159	20140	209	32015	259	41330	309	48996	359	55509	409	61172	459	66181
10	**00000**	**60**	**77815**	**110**	**04139**	**160**	**20412**	**210**	**32222**	**260**	**41497**	**310**	**49136**	**360**	**55630**	**410**	**61278**	**460**	**66276**
11	04139	61	78533	111	04532	161	20683	211	32428	261	41664	311	49276	361	55751	411	61384	461	66370
12	07918	62	79239	112	04922	162	20952	212	32634	262	41830	312	49415	362	55871	412	61490	462	66464
13	11394	63	79934	113	05308	163	21219	213	32838	263	41996	313	49554	363	55991	413	61595	463	66558
14	14613	64	80618	114	05690	164	21484	214	33041	264	42160	314	49693	364	56110	414	61700	464	66652
15	17609	65	81291	115	06070	165	21748	215	33244	265	42325	315	49831	365	56229	415	61805	465	66745
16	20412	66	81954	116	06446	166	22011	216	33445	266	42488	316	49969	366	56348	416	61909	466	66839
17	23045	67	82607	117	06819	167	22272	217	33646	267	42651	317	50106	367	56467	417	62014	467	66932
18	25527	68	83251	118	07188	168	22531	218	33846	268	42813	318	50243	368	56585	418	62118	468	67025
19	27875	69	83885	119	07555	169	22789	219	34044	269	42975	319	50379	369	56703	419	62221	469	67117
20	**30103**	**70**	**84510**	**120**	**07918**	**170**	**23045**	**220**	**34242**	**270**	**43136**	**320**	**50515**	**370**	**56820**	**420**	**62325**	**470**	**67210**
21	32222	71	85126	121	08279	171	23300	221	34439	271	43297	321	50651	371	56937	421	62428	471	67302
22	34242	72	85733	122	08636	172	23553	222	34635	272	43457	322	50786	372	57054	422	62531	472	67394
23	36173	73	86332	123	08991	173	23805	223	34830	273	43616	323	50920	373	57171	423	62634	473	67486
24	38021	74	86923	124	09342	174	24055	224	35025	274	43775	324	51055	374	57287	424	62737	474	67578
25	39794	75	87506	125	09691	175	24304	225	35218	275	43933	325	51188	375	57403	425	62839	475	67669
26	41497	76	88081	126	10037	176	24551	226	35411	276	44091	326	51322	376	57519	426	62941	476	67761
27	43136	77	88649	127	10380	177	24797	227	35603	277	44248	327	51455	377	57634	427	63043	477	67852
28	44716	78	89209	128	10721	178	25042	228	35793	278	44404	328	51587	378	57749	428	63144	478	67943
29	46240	79	89763	129	11059	179	25285	229	35984	279	44560	329	51720	379	57864	429	63246	479	68034
30	**47712**	**80**	**90309**	**130**	**11394**	**180**	**25527**	**230**	**36173**	**280**	**44716**	**330**	**51851**	**380**	**57978**	**430**	**63347**	**480**	**68124**
31	49136	81	90849	131	11727	181	25768	231	36361	281	44871	331	51983	381	58092	431	63448	481	68215
32	50515	82	91381	132	12057	182	26007	232	36549	282	45025	332	52114	382	58206	432	63548	482	68305
33	51851	83	91908	133	12385	183	26245	233	36736	283	45179	333	52244	383	58320	433	63649	483	68395
34	53148	84	92428	134	12710	184	26482	234	36922	284	45332	334	52375	384	58433	434	63749	484	68485
35	54407	85	92942	135	13033	185	26717	235	37107	285	45484	335	52504	385	58546	435	63849	485	68574
36	55630	86	93450	136	13354	186	26951	236	37291	286	45637	336	52634	386	58659	436	63949	486	68664
37	56820	87	93952	137	13672	187	27184	237	37475	287	45788	337	52763	387	58771	437	64048	487	68753
38	57978	88	94448	138	13988	188	27416	238	37658	288	45939	338	52892	388	58883	438	64147	488	68842
39	59106	89	94939	139	14301	189	27646	239	37840	289	46090	339	53020	389	58995	439	64246	489	68931
40	**60206**	**90**	**95424**	**140**	**14613**	**190**	**27845**	**240**	**38021**	**290**	**46240**	**340**	**53148**	**390**	**59106**	**440**	**64345**	**490**	**69020**
41	61278	91	95904	141	14922	191	28103	241	38202	291	46389	341	53275	391	59218	441	64444	491	69108
42	62325	92	96379	142	15229	192	28330	242	38382	292	46538	342	53403	392	59329	442	64542	492	69197
43	63347	93	96848	143	15534	193	28556	243	38561	293	46687	343	53529	393	59439	443	64640	493	69285
44	64345	94	97313	144	15836	194	28780	244	38739	294	46835	344	53656	394	59550	444	64738	494	69373
45	65321	95	97772	145	16137	195	29003	245	38917	295	46982	345	53782	395	59660	445	64836	495	69461
46	66276	96	98227	146	16435	196	29226	246	39094	296	47129	346	53908	396	59770	446	64933	496	69548
47	67210	97	98677	147	16732	197	29447	247	39270	297	47276	347	54033	397	59879	447	65031	497	69636
48	68124	98	99123	148	17026	198	29667	248	39445	298	47422	348	54158	398	59988	448	65128	498	69723
49	69020	99	99564	149	17319	199	29885	249	39620	299	47567	349	54283	399	60097	449	65225	499	69810
50	**69897**	**100**	**00000**	**150**	**17609**	**200**	**30103**	**250**	**39794**	**300**	**47712**	**350**	**54407**	**400**	**60206**	**450**	**65321**	**500**	**69897**

N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa	N	Mantissa
500	**69897**	**550**	**74036**	**600**	**77815**	**650**	**81291**	**700**	**84510**	**750**	**87506**	**800**	**90309**	**850**	**92942**	**900**	**95424**	**950**	**97772**
501	69984	551	74115	601	77887	651	81358	701	84572	751	87564	801	90363	851	92993	901	95472	951	97818
502	70070	552	74194	602	77960	652	81425	702	84634	752	87622	802	90417	852	93044	902	95521	952	97864
503	70157	553	74273	603	78032	653	81491	703	84696	753	87679	803	90472	853	93095	903	95569	953	97909
504	70243	554	74351	604	78104	654	81558	704	84757	754	87737	804	90526	854	93146	904	95617	954	97955
505	70329	555	74429	605	78176	655	81624	705	84819	755	87795	805	90580	855	93197	905	95665	955	98000
506	70415	556	74507	606	78247	656	81690	706	84880	756	87852	806	90634	856	93247	906	95713	956	98046
507	70501	557	74586	607	78319	657	81757	707	84942	757	87910	807	90687	857	93298	907	95761	957	98091
508	70586	558	74663	608	78390	658	81823	708	85003	758	87967	808	90741	858	93349	908	95809	958	98137
509	70672	559	74741	609	78462	659	81889	709	85065	759	88024	809	90795	859	93399	909	95856	959	98182
510	**70757**	**560**	**74819**	**110**	**78533**	**660**	**81954**	**710**	**85126**	**760**	**88081**	**810**	**90849**	**860**	**93450**	**910**	**95904**	**960**	**98227**
511	70842	561	74896	611	78604	661	82020	711	85187	761	88138	811	90902	861	93500	911	95952	961	98272
512	70927	562	74974	612	78675	662	82086	712	85248	762	88195	812	90956	862	93551	912	95999	962	98318
513	71012	563	75051	613	78746	663	82151	713	85309	763	88252	813	91009	863	93601	913	96047	963	98363
514	71096	564	75128	614	78817	664	82217	714	85370	764	88309	814	91062	864	93651	914	96095	964	98408
515	71181	565	75205	615	78888	665	82282	715	85431	765	88366	815	91116	865	93702	915	96142	965	98453
516	71265	566	75282	616	78958	666	82347	716	85491	766	88423	816	91169	866	93752	916	96190	966	98498
517	71349	567	75358	617	79029	667	82413	717	85552	767	88480	817	91222	867	93802	917	96237	967	98543
518	71433	568	75435	618	79099	668	82478	718	85612	768	88536	818	91275	868	93852	918	96284	968	98588
519	71517	569	75511	619	79169	669	82543	719	85673	769	88593	819	91328	869	93902	919	96332	969	98632
520	**71600**	**570**	**75587**	**120**	**79239**	**670**	**82607**	**720**	**85733**	**770**	**88649**	**820**	**91381**	**870**	**93952**	**920**	**96379**	**970**	**98677**
521	71684	571	75664	621	79309	671	82672	721	85794	771	88705	821	91434	871	94002	921	96426	971	98722
522	71767	572	75740	622	79379	672	82737	722	85854	772	88762	822	91487	872	94052	922	96473	972	98767
523	71850	573	75815	623	79449	673	82802	723	85914	773	88818	823	91540	873	94101	923	96520	973	98811
524	71933	574	75891	624	79518	674	82866	724	85974	774	88874	824	91593	874	94151	924	96567	974	98856
525	72016	575	75967	625	79588	675	82930	725	86034	775	88930	825	91645	875	94201	925	96614	975	98900
526	72099	576	76042	626	79657	676	82995	726	86094	776	88986	826	91698	876	94250	926	96661	976	98945
527	72181	577	76118	627	79727	677	83059	727	86153	777	89042	827	91751	877	94300	927	96708	977	98989
528	72263	578	76193	628	79796	678	83123	728	86213	778	89098	828	91803	878	94349	928	96755	978	99034
529	72346	579	76268	629	79865	679	83187	729	86273	779	89154	829	91855	879	94399	929	96802	979	99078
530	**72428**	**580**	**76343**	**630**	**79934**	**680**	**83251**	**730**	**86332**	**780**	**89209**	**830**	**91908**	**880**	**94448**	**930**	**96848**	**980**	**99123**
531	72509	581	76418	631	80003	681	83315	731	86392	781	89265	831	91960	881	94498	931	96895	981	99167
532	72591	582	76492	632	80072	682	83378	732	86451	782	89321	832	92012	882	94547	932	96942	982	99211
533	72673	583	76567	633	80140	683	83442	733	86510	783	89376	833	92065	883	94596	933	96988	983	99255
534	72754	584	76641	634	80209	684	83506	734	86570	784	89432	834	92117	884	94645	934	97035	984	99300
535	72835	585	76716	635	80277	685	83569	735	86629	785	89487	835	92169	885	94694	935	97081	985	99344
536	72916	586	76790	636	80346	686	83632	736	86688	786	89542	836	92221	886	94743	936	97128	986	99388
537	72997	587	76864	637	80414	687	83696	737	86747	787	89597	837	92273	887	94792	937	97174	987	99432
538	73078	588	76938	638	80482	688	83759	738	86806	788	89653	838	92324	888	94841	938	97220	988	99476
539	73159	589	77012	639	80550	689	83822	739	86864	789	89708	839	92376	889	94890	939	97267	989	99520
540	**73239**	**590**	**77085**	**640**	**80618**	**690**	**83885**	**740**	**86923**	**790**	**89763**	**840**	**92428**	**890**	**94939**	**940**	**97313**	**990**	**99564**
541	73320	591	77159	641	80686	691	83948	741	86982	791	89818	841	92480	891	94988	941	97359	991	99607
542	73400	592	77232	642	80754	692	84011	742	87040	792	89873	842	92531	892	95036	942	97405	992	99651
543	73480	593	77305	643	80821	693	84073	743	87099	793	89927	843	92583	893	95085	943	97451	993	99695
544	73560	594	77379	644	80889	694	84136	744	87157	794	89982	844	92634	894	95134	944	97497	994	99739
545	73640	595	77452	645	80956	695	84198	745	87216	795	90037	845	92686	895	95182	945	97543	995	99782
546	73719	596	77525	646	81023	696	84261	746	87274	796	90091	846	92737	896	95231	946	97589	996	99826
547	73799	597	77597	647	81090	697	84323	747	87332	797	90146	847	92788	897	95279	947	97635	997	99870
548	73878	598	77670	648	81158	698	84386	748	87390	798	90200	848	92840	898	95328	948	97681	998	99913
549	73957	599	77743	649	81224	699	84448	749	87448	799	90255	849	92891	899	95376	949	97727	999	99957
550	**74036**	**600**	**77815**	**650**	**81291**	**700**	**84510**	**750**	**87506**	**800**	**90309**	**850**	**92942**	**900**	**95424**	**950**	**97772**	**1000**	**00000**

TABELA 5 — JUROS COMPOSTOS

Valores de $(1 + i)^n$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	1,0100000	1,0200000	1,0300000	1,0400000	1,0500000	1,0600000	1,0700000	1,0800000
2	1,0201000	1,0404000	1,0609000	1,0816000	1,1025000	1,1236000	1,1449000	1,1664000
3	1,0303010	1,0612080	1,0927270	1,1248640	1,1576250	1,1910160	1,2250430	1,2597120
4	1,0406040	1,0824322	1,1255088	1,1698586	1,2155063	1,2624770	1,3107960	1,3604890
5	1,0510101	1,1040808	1,1592741	1,2166529	1,2762816	1,3382256	1,4025517	1,4693281
6	1,0615202	1,1261624	1,1940523	1,2653190	1,3400956	1,4185191	1,5007304	1,5868743
7	1,0721354	1,1486857	1,2298739	1,3159318	1,4071004	1,5036303	1,6057815	1,7138243
8	1,0828567	1,1716594	1,2667701	1,3685691	1,4774554	1,5938481	1,7181862	1,8509302
9	1,0936853	1,1950926	1,3047732	1,4233118	1,5513282	1,6894790	1,8384592	1,9990046
10	1,1046221	1,2189944	1,3439164	1,4802443	1,6288946	1,7908477	1,9671514	2,1589250
11	1,1156684	1,2433743	1,3842339	1,5394541	1,7103394	1,8982986	2,1048520	2,3316390
12	1,1268250	1,2682418	1,4257609	1,6010322	1,7958563	2,0121965	2,2521916	2,5181701
13	1,1380933	1,2936066	1,4685337	1,6650735	1,8856491	2,1329283	2,4098450	2,7196237
14	1,1494742	1,3194788	1,5125897	1,7316765	1,9799316	2,2609040	2,5785342	2,9371936
15	1,1609690	1,3458683	1,5579674	1,8009435	2,0789282	2,3965582	2,7590315	3,1721691
16	1,1725786	1,3727857	1,6047064	1,8729813	2,1828746	2,5403517	2,9521638	3,4259426
17	1,1843044	1,4002414	1,6528476	1,9479005	2,2920183	2,6927728	3,1588152	3,7000181
18	1,1961475	1,4282463	1,7024331	2,0258165	2,4066192	2,8543392	3,3799323	3,9960195
19	1,2081090	1,4568112	1,7535061	2,1068492	2,5269502	3,0255995	3,6165275	4,3157011
20	1,2201900	1,4859474	1,8061112	2,1911231	2,6532977	3,2071355	3,8696845	4,6609571
21	1,2323919	1,5156663	1,8602946	2,2787681	2,7859626	3,3995636	4,1405624	5,0338337
22	1,2447159	1,5459797	1,9161034	2,3699188	2,9252607	3,6035374	4,4304017	5,4365404
23	1,2571630	1,5768993	1,9735865	2,4647155	3,0715238	3,8197497	4,7405299	5,8714637
24	1,2697347	1,6084373	2,0327941	2,5633042	3,2250999	4,0489346	5,0723670	6,3411807
25	1,2824320	1,6406060	2,0937779	2,6658363	3,3863549	4,2918707	5,4274326	6,8484752
26	1,2952563	1,6734181	2,1565913	2,7724698	3,5556727	4,5493830	5,8073529	7,3963532
27	1,3082089	1,7068865	2,2212890	2,8833686	3,7334563	4,8223459	6,2138676	7,9880615
28	1,3212910	1,7410242	2,2879277	2,9987033	3,9201291	5,1116867	6,6488384	8,6271064
29	1,3345039	1,7758447	2,3565655	3,1186515	4,1161356	5,4183879	7,1142571	9,3172749
30	1,3478489	1,8113616	2,4272625	3,2433975	4,3219424	5,7434912	7,6122550	10,0626569

TABELA 6 — VALORES ATUAIS (DESCONTO COMPOSTO)

Valores de $\frac{1}{(1 + i)^n} = v^n$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	0,9900990	0,9803922	0,9708738	0,9615385	0,9523810	0,9433962	0,9345794	0,9259259
2	0,9802961	0,9611688	0,9425959	0,9245562	0,9070295	0,8899964	0,8734387	0,8573388
3	0,9705902	0,9423223	0,9151417	0,8889964	0,8638376	0,8396193	0,8162979	0,7938322
4	0,9609803	0,9238454	0,8884871	0,8548042	0,8227025	0,7920937	0,7628952	0,7350299
5	0,9514657	0,9057308	0,8626088	0,8219271	0,7835262	0,7472582	0,7129862	0,6805832
6	0,9420452	0,8879714	0,8374843	0,7903145	0,7462154	0,7049605	0,6663422	0,6301696
7	0,9327181	0,8705602	0,8130915	0,7599178	0,7106813	0,6650571	0,6227497	0,5834904
8	0,9234832	0,8531904	0,7894092	0,7306902	0,6768391	0,6274124	0,5820091	0,5042689
9	0,9143398	0,8367553	0,7664167	0,7025867	0,6446089	0,5918985	0,5439337	0,5002490
10	0,9052870	0,8203483	0,7440939	0,6755642	0,6139133	0,5583948	0,5083493	0,4631935
11	0,8963237	0,8042630	0,7224213	0,6495809	0,5846793	0,5267875	0,4750928	0,4288829
12	0,8874492	0,7884932	0,7013799	0,6245971	0,5568374	0,4969694	0,4440120	0,3971138
13	0,8786626	0,7730325	0,6809513	0,6005741	0,5303214	0,4688390	0,4149645	0,3676979
14	0,8699630	0,7578750	0,6611178	0,5774751	0,5050680	0,4423010	0,3878172	0,3404610
15	0,8613495	0,7430147	0,6418620	0,5552645	0,4810171	0,4172651	0,3624460	0,3152417
16	0,8528213	0,7284458	0,6231669	0,5339082	0,4581115	0,3936463	0,3387346	0,2918905
17	0,8443775	0,7141626	0,6050165	0,5133733	0,4362967	0,3713644	0,3165644	0,2702690
18	0,8360173	0,7001594	0,5873946	0,4936281	0,4155207	0,3503438	0,2958639	0,2502490
19	0,8277399	0,6864308	0,5702860	0,4746424	0,3957340	0,3305130	0,2765083	0,2317121
20	0,8195445	0,6729713	0,5536758	0,4563870	0,3768895	0,3118047	0,2584190	0,2145482
21	0,8114302	0,6597758	0,5375493	0,4388336	0,3589424	0,2941554	0,2415131	0,1986558
22	0,8033962	0,6468390	0,5218925	0,4219554	0,3418499	0,2775051	0,2257132	0,1839405
23	0,7954418	0,6341559	0,5066918	0,4057263	0,3255713	0,2617973	0,2109469	0,1703153
24	0,7875661	0,6217215	0,4919337	0,3901215	0,3100679	0,2469786	0,1971466	0,1576993
25	0,7797684	0,6095309	0,4776056	0,3751168	0,2953028	0,2329986	0,1842492	0,1460179
26	0,7720480	0,5975793	0,4636947	0,3606892	0,2812407	0,2198100	0,1721955	0,1352018
27	0,7644039	0,5858620	0,4501891	0,3468166	0,2678483	0,2073680	0,1609304	0,1251868
28	0,7568356	0,5743746	0,4370768	0,3334775	0,2550936	0,1956301	0,1504022	0,1159137
29	0,7493421	0,5631123	0,4243464	0,3206514	0,2429463	0,1845567	0,1405628	0,1073275
30	0,7419229	0,5520709	0,4119868	0,3088187	0,2313775	0,1741101	0,1313641	0,0993773

TABELA 7 — CAPITALIZAÇÃO

Valores de $\frac{(1 + i)^n - 1}{i} = S_{n\rceil i}$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,0100000	2,0200000	2,0300000	2,0400000	2,0500000	2,0600000	2,0700000	2,0800000
3	3,0301000	3,0604000	3,0909000	3,1216000	3,1525000	3,1836000	3,2149000	3,2464000
4	4,0604010	4,1216080	4,1836270	4,2464640	4,3101250	4,3746160	4,4399430	4,5061120
5	5,1010050	5,2040402	5,3091358	5,4163226	5,5256313	5,6370930	5,7507390	5,8666010
6	6,1520151	6,3081210	6,4684099	6,6329755	6,8019128	6,9753185	7,1532907	7,3359290
7	7,2135352	7,4342834	7,6624622	7,8982945	8,1420085	8,3938377	8,6540211	8,9228034
8	8,2856706	8,5829691	8,8923361	9,2142263	9,5491089	9,8974679	10,2598026	10,6366276
9	9,3685273	9,7546284	10,1591061	10,5827953	11,0265643	11,4913160	11,9779888	12,4875578
10	10,4622125	10,9497210	11,4638793	12,0061071	12,5778925	13,1807949	13,8164480	14,4865625
11	11,5668347	12,1687154	12,8077957	13,4863514	14,2067872	14,9716426	15,7835993	16,6454875
12	12,6825030	13,4120897	14,1920296	15,0258055	15,9171265	16,8699412	17,8884513	18,9771265
13	13,8093280	14,6803315	15,6177905	16,6268377	17,7129829	18,8821377	20,1406429	21,4952966
14	14,9474213	15,9739382	17,0863242	18,2919112	19,5986320	21,0150659	22,5504879	24,2149203
15	16,0968955	17,2934169	18,5989139	20,0235876	21,5785636	23,2759699	25,1290220	27,1521139
16	17,2578645	18,6392853	20,1568813	21,8245311	23,6574918	25,6725281	27,8880536	30,3242830
17	18,4304431	20,0120710	21,7615877	23,6975124	25,8403664	28,2128798	30,8402173	33,7502257
18	19,6147476	21,4123124	23,4144354	25,6454129	28,1323847	30,9056526	33,9990325	37,4502437
19	20,8108950	22,8405587	25,1168684	27,6712294	30,5390039	33,7599917	37,3789648	41,4462632
20	22,0190040	24,2973698	26,8703745	29,7780786	33,0659541	36,7855912	40,9954923	45,7619643
21	23,2391940	25,7833172	28,6764857	31,9692017	35,7192518	39,9927267	44,8651768	50,4229214
22	24,4715860	27,2989835	30,5367803	34,2479698	38,5052144	43,3922903	49,0057392	55,4567552
23	25,7163018	28,8449632	32,4528837	36,6178886	41,4304751	46,9958277	53,4361409	60,8932956
24	26,9734649	30,4218625	34,4264702	39,0826041	44,5019989	50,8155774	58,1766708	66,7647592
25	28,2431995	32,0302997	36,4592643	41,6459083	47,7270988	54,8645120	63,2490377	73,1059400
26	29,5256315	33,6709057	38,5530423	44,3117446	51,1134538	59,1563827	68,6764704	79,9544152
27	30,8208878	35,3443238	40,7096335	47,0842144	54,6691265	63,7057657	74,4838232	87,3507684
28	32,1290967	37,0512103	42,9309225	49,9675830	58,4025828	68,5281116	80,6976909	95,3388298
29	33,4503877	38,7922345	45,2188502	52,9662863	62,3227119	73,6397983	87,3465293	103,9659362
30	34,7848915	40,5680793	47,5754157	56,0849378	66,4388475	79,0581862	94,4607863	113,2832111

TABELA 8 — VALORES ATUAIS (RENDAS CERTAS)

Valores de $\frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} = a_{\overline{n}|i}$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	0,9900990	0,9803921	0,9708738	0,9615385	0,9523810	0,9433962	0,9345794	0,9259259
2	1,9703951	1,9415609	1,9134697	1,8860947	1,8594104	1,8333927	1,8080182	1,7832648
3	2,9409852	2,8838833	2,8286114	2,7750910	2,7232480	2,6730120	2,6243160	2,5770970
4	3,9019656	3,8077287	3,7170984	3,6298952	3,5459505	3,4651056	3,3872113	3,3121268
5	4,8534312	4,7134595	4,5797072	4,4518223	4,3294767	4,2123638	4,1001974	3,9927100
6	5,7954765	5,6011431	5,4171914	5,2421369	5,0756921	4,9173243	4,7665397	4,6228797
7	6,7281945	6,4719911	6,2302830	6,0020550	5,7863734	5,5823814	5,3892894	5,2063701
8	7,6516778	7,3254814	7,0196922	6,7327449	6,4632128	6,2097938	5,9712985	5,7466389
9	8,5660176	8,1622367	7,7861090	7,4353316	7,1078217	6,8016923	6,5152323	6,2468879
10	9,4713045	8,9825850	8,5302028	8,1108958	7,7217349	7,3600871	7,0235815	6,7100814
11	10,3676283	9,7868481	9,2526241	8,7604767	8,3064142	7,8868746	7,4986743	7,1389643
12	11,2550775	10,5753412	9,9540040	9,3850738	8,8632516	8,3838439	7,9426863	7,5360780
13	12,1337401	11,3483738	10,6349553	9,9856475	9,3935730	8,8526830	8,3576507	7,9037759
14	13,0037030	12,1062488	11,2960731	10,5631229	9,8986409	9,2949839	9,0138423	8,2442370
15	13,8650525	12,8492635	11,9379351	11,1183874	10,3796580	9,7122490	9,1079140	8,5594787
16	14,7178738	13,5777093	12,5611020	11,6522956	10,8377696	10,1058953	9,4466486	8,8513692
17	15,5622513	14,2918719	13,1661185	12,1656689	11,2740663	10,4772597	9,7632230	9,1216381
18	16,3982686	14,9920313	13,7535131	12,6592970	11,6895869	10,8276035	10,0590869	9,3718871
19	17,2260085	15,6784620	14,3237991	13,1339394	12,0853209	11,1581165	10,3355952	9,6035992
20	18,0455530	16,3514333	14,8774749	13,5903263	12,4622103	11,4699212	10,5940143	9,8181474
21	18,8569831	17,0112092	15,4150241	14,0291600	12,8211527	11,7640766	10,8355273	10,0168031
22	19,6603793	17,6580482	15,9369166	14,4511153	13,1630026	12,0415817	11,0612405	10,2007437
23	20,4558211	18,2922041	16,4436084	14,8568417	13,4885739	12,3033790	11,2721874	10,3710590
24	21,2433873	18,9139256	16,9355421	15,2469631	13,7986418	12,5503575	11,4693340	10,5287583
25	22,0231557	19,5234565	17,4131477	15,6220799	14,0939446	12,7833562	11,6535832	10,6747762
26	22,7952037	20,1210358	17,8768424	15,9827692	14,3751853	13,0031662	11,8257787	10,8099780
27	23,5596076	20,7068978	18,3270315	16,3295858	14,6430336	13,2105341	11,9867090	10,9351648
28	24,3164431	21,2812724	18,7641082	16,6630632	14,8981273	13,4061643	12,1371113	11,0510785
29	25,0657853	21,8443847	19,1884546	16,9837146	15,1410736	13,5907210	12,2776471	11,1584060
30	25,8077082	22,3964556	19,6004414	17,2920333	15,3724510	13,7648312	12,4090412	11,2577833

TABELA 9 — AMORTIZAÇÃO

Valores de $\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} = \dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}}$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100000	1,0200000	1,0300000	1,0400000	1,0500000	1,0600000	1,0700000	1,0800000	1,0900000	1,1000000
2	0,5075124	0,5150495	0,5226108	0,5301961	0,5378049	0,5454369	0,5530918	0,5607692	0,5684689	0,5761905
3	0,3400221	0,3467547	0,3535304	0,3603485	0,3672086	0,3741098	0,3810517	0,3880335	0,3950548	0,4021148
4	0,2562811	0,2626238	0,2690271	0,2754901	0,2820118	0,2885915	0,2952281	0,3019208	0,3086687	0,3154708
5	0,2060398	0,2121584	0,2183546	0,2246271	0,2309748	0,2373964	0,2438907	0,2504565	0,2570925	0,2637975
6	0,1725484	0,1785258	0,1845975	0,1907619	0,1970175	0,2033626	0,2097958	0,2163154	0,2229198	0,2296074
7	0,1486283	0,1545120	0,1605064	0,1666096	0,1728198	0,1791350	0,1855532	0,1920724	0,1986905	0,2054055
8	0,1306903	0,1365098	0,1424564	0,1485278	0,1547218	0,1610359	0,1674678	0,1740148	0,1906744	0,1874440
9	0,1167404	0,1225154	0,1284339	0,1344930	0,1406901	0,1470222	0,1534865	0,1600797	0,1667988	0,1736405
10	0,1055821	0,1113265	0,1172305	0,1232909	0,1295046	0,1358680	0,1423775	0,1490295	0,1558201	0,1627454
11	0,0964541	0,1021779	0,1080775	0,1141490	0,1203889	0,1267929	0,1333569	0,1400763	0,1469467	0,1539631
12	0,0888488	0,0945596	0,1004621	0,1065522	0,1128254	0,1192770	0,1259020	0,1326950	0,1396507	0,1467633
13	0,0824148	0,0882404	0,0940295	0,1001437	0,1064558	0,1129601	0,1196509	0,1265218	0,1335666	0,1407785
14	0,0769012	0,0826020	0,0885263	0,0946690	0,1010240	0,1075849	0,1143449	0,1212969	0,1284332	0,1357462
15	0,0721238	0,0778255	0,0837666	0,0899411	0,0963423	0,1029628	0,1097946	0,1168295	0,1240589	0,1314738
16	0,0679446	0,0736501	0,0796109	0,0858200	0,0922699	0,0989521	0,1058577	0,1129769	0,1202999	0,1278166
17	0,0642581	0,0699698	0,0759525	0,0821985	0,0886991	0,0954448	0,1024252	0,1096294	0,1170463	0,1246641
18	0,0609821	0,0667021	0,0727087	0,0789933	0,0855462	0,0923565	0,0994126	0,1067021	0,1142123	0,1219302
19	0,0580518	0,0637818	0,0698139	0,0761386	0,0827450	0,0896209	0,9967530	0,1041276	0,1117304	0,1195469
20	0,0554153	0,0611567	0,0672157	0,0735818	0,0802426	0,0871846	0,0943929	0,1018522	0,1095465	0,1174596
21	0,0530308	0,0587848	0,0648718	0,0712801	0,0779961	0,0850046	0,0922890	0,0998323	0,1076166	0,1156244
22	0,0508637	0,0566314	0,0627474	0,0691988	0,0759705	0,0830456	0,0904058	0,0980321	0,1059050	0,1140051
23	0,0488858	0,0546681	0,0608139	0,0673091	0,0741368	0,0812785	0,0887139	0,0964222	0,1043819	0,1125718
24	0,0470735	0,0528711	0,0590474	0,0655868	0,0724709	0,0796790	0,0871890	0,0949780	0,1030226	0,1112998
25	0,0454068	0,0512204	0,0574279	0,0640120	0,0709525	0,0782267	0,0858105	0,0936788	0,1018063	0,1101681
26	0,0438689	0,0496992	0,0559383	0,0625674	0,0695643	0,0769044	0,0845610	0,0925071	0,1007154	0,1091590
27	0,0424455	0,0482931	0,0545642	0,0612385	0,0682919	0,0756972	0,0834257	0,0914481	0,0997349	0,1082576
28	0,0411244	0,0469897	0,0532932	0,0600130	0,0671225	0,0745926	0,0823919	0,0904889	0,0988521	0,1074510
29	0,0398950	0,0457784	0,0521147	0,0588799	0,0660455	0,0735796	0,0814487	0,0896185	0,0980557	0,1067281
30	0,0387481	0,0446493	0,0510193	0,0578301	0,0650514	0,0726489	0,0805864	0,0888274	0,0973364	0,1060793

Respostas dos Exercícios Propostos

Respostas dos Problemas e Testes de Concursos

Respostas dos Testes e das Questões de Vestibulares

UNIDADE 1
MATEMÁTICA COMERCIAL

Capítulo 1
Razões e proporções

Respostas dos exercícios propostos

1) a) $\frac{7}{30}$ b) $\frac{1}{40}$ c) $\frac{1}{4}$

2) a) $\frac{1\,300}{26\,000} = \frac{1}{20}$ c) $\frac{30\,000}{57\,300} = \frac{100}{191}$

b) $\frac{1\,300}{57\,300} = \frac{13}{573}$

3) a) V d) V g) F
b) F e) V h) F
c) V f) V

4) a) 12 e) 15 i) 1
b) 60,5 f) 1 j) $\frac{11}{8}$
c) 3 g) 6
d) 9 h) 2 ou –1

5) a) x = 3,2 e y = 2,4
b) x = 0,625 e y = 1,75
c) x = 4 e y = 5,5
d) x = 1 e y = $-\frac{5}{4}$

6) a) 21 e 28 d) 6 e 27 g) 123 e 30
b) 40 e 16 e) 14 e 16 h) 100 e 70
c) 6 e 14 f) 33 e 39

7) $ 36,00 e $ 81,00

8) 45 g e 9 g

9) $ 7 000,00 e $ 8 000,00

10) 33 000 e 44 000

11) 30 cm

12) 800 L e 1 400 L

13) a) 18; 36; 27
b) 25; 12,5; 37,5
c) x = 36; y = 9; z = 54
d) x = $\frac{56}{3}$; y = $\frac{28}{3}$; z = $\frac{70}{3}$
e) x = $\frac{384}{7}$; y = $\frac{768}{7}$; z = $\frac{1\,152}{7}$
f) x = 40 000; y = 30 000; z = 50 000
g) x = 3; y = 4; z = 1
h) x = 21; y = 12; z = 9

14) a = 15; b = 35; c = 25; d = 20

Respostas dos problemas e testes de concursos

1) 460; 1 265; 6 052

2) 231; 693; 1 848

3) partes: 40, 56, 140, 168; nº 404

4) $ 21 000,00; $ 52 500,00; $ 28 000,00

5) 1ª: $ 4,90; 2ª: $ 6,30; 3ª: $ 10,50

6) 150 meninos

7) 1ª: $ 112,50; 2ª: $ 67,50

8) 12 000 funcionários

9) 90 passageiros

10) c

11) e

12) b

13) c

14) d

15) c

Capítulo 2
Grandezas proporcionais e divisão proporcional

Respostas dos exercícios propostos

1) Inversamente proporcionais

2) Diretamente proporcionais

3) Inversamente proporcionais

4) Inversamente proporcionais

5) Diretamente proporcionais

6) Diretamente proporcionais

7) a) 45; 225; 25 d) 280; 210; 350
b) $\frac{416}{27}$; $\frac{104}{9}$; $\frac{2\,080}{27}$ e) 24; 60; 36
c) 900; 1 800; 2 700

8) a) 300; 200; 150
b) 878 400; 732 000; 1 171 200
c) 18 564; 49 504; 21 216; 28 560

9) $ 1 800 000,00; $ 1 600 000,00; $ 1 520 000,00; $ 1 400 000,00

10) $ 4 590 000,00; $ 4 284 000,00; $ 3 780 000,00; $ 3 570 000,00

11) 6 000

12) $ 625,00; $ 250,00; $ 375,00

13) 84; 40; 112

14) 900; 800; 432

15) $ 2 500,00; $ 1 500,00; $ 600,00; $ 1 600,00

Respostas dos problemas e testes de concursos

1) $ 60 000,00; $ 100 000,00; $ 180 000,00. O lucro total foi de $ 340 000,00.

2) 1º: $ 11 200,00; 2º: $ 9 450,00

3) 1º: $ 252 000,00; 2º: $ 432 000,00

4) 3 360

5) 114; 190; 380

6) $ 1 446,00

7) e

8) d

9) b

10) b

11) a

Capítulo 3
Regra de sociedade

Respostas dos exercícios propostos

1) $ 960,00; $ 640,00

2) $ 1 200,00; $ 900,00; $ 1 000,00

3) $ 12 000,00; $ 6 000,00; $ 2 000,00

4) $ 120 000,00; $ 180 000,00; $ 210 000,00

5) $ 7 500,00; $ 10 500,00

6) $ 14 000,00; $ 35 000,00

7) 60 000 m²; 90 000 m²; 105 000 m²

8) $ 24 193,55; $ 16 129,03; $ 9 677,42

9) $ 12 000,00; $ 18 000,00; $ 6 000,00

10) $ 53 594,60; $ 42 875,67; $ 35 729,73

Respostas dos problemas e testes de concursos

1) $ 2 090,50 e $ 1 572,50

2) **A**: $ 21 090,00; **B**: $ 28 120,00

3) Lucro: $ 204 000,00; **A**: $ 20 400,00; **B**: $ 34 000,00; **C**: $ 61 200,00

4) **A**: $ 103 700,00; **B**: $ 207 400,00

5) **C**: $ 57 645,00; **D**: $ 38 430,00

6) Lucro (1º): $ 40 350,00;
capital (2º): $ 160 000,00

7) Lucro (1º): $ 5 250,00;
lucro (2º): $ 2 750,00;
capital (3º): $ 60 000,00

8) **A**: $ 500 000,00; **B**: $ 650 000,00; **C**: $ 850 000,00

9) 1º: $ 625,00; 2º: $ 1 875,00; 3º: $ 2 500,00

10) 1º: $ 21 600,00; 2º: $ 6 600,00

11) **A**: $ 8 400,00; **B**: $ 10 080,00; **C**: $ 6 720,00

12) **A**: $ 162 180,00; **B**: $ 324 519,00

13) c

14) b

15) d

16) e

Capítulo 4
Regra de três

Respostas dos exercícios propostos

1) $ 300,00

2) 294 kg

3) 15 dias

4) 270 L

5) $ 1 600,00

6) $ 10 800,00

7) 25 dias

8) 4h 48min

9) 63 dias

10) 500 m

11) 16 dias

12) $\frac{1}{3}$

13) 40 L

14) $\frac{5}{6}$

15) 6,4

16) 25 operários

17) 2 160 m²

18) 45 dias

19) 8 horas

20) 300 m²

21) 3 homens

22) 24 homens

23) 5 120 km

24) 4 horas

25) a) R$ 496,55
b) R$ 551,17

26) a) R$ 153,45
b) R$ 159,30

27) R$ 1 643,22

28) 6 576,78 francos franceses

29) 920,29 marcos

30) 40,04 francos franceses

31) Fazer a transformação indireta.

32) 296,01 marcos

Respostas dos problemas e testes de concursos

1) 92 tábuas

2) 18 horas

3) 1,95 m

4) 368 km

5) $ 24 450,00

6) 3 horas, 12 minutos e 12 segundos

7) 88 pessoas

8) 90 m

9) 52,5 m

10) 10 horas, 21 minutos e 18 segundos

11) 30 operários

12) 21 tecelões

13) 72 minutos

14) É mais vantajoso comprar diretamente.

15) É mais vantajoso comprar em Nova York.

16) $ 23 562,00

17) 200 escudos

18) b

19) d

20) a

21) c

22) b

23) d

24) c

25) d

26) b

Capítulo 5
Porcentagem

Respostas dos exercícios propostos

1) a) 12,6
b) 87
c) 0,8
d) 45
e) 1,08
f) 0,364
g) 0,6
h) 0,26666...

2) 666,67 aproximadamente

3) $ 400 000,00

4) 2%

5) a) 125
b) 60
c) 400
d) 7 500
e) $133\,333,\overline{3}$
f) $111,\overline{1}$

6) a) 20%
b) 5%
c) 25%
d) 6,25%
e) 3%
f) 1%

7) 1 170 pessoas

8) 0,12 m^3

9) 110 000 pessoas

10) $ 765,00

11) $ 10 000,00

12) 25%

13) $ 3 000,00

14) 3,2%

15) 200%

16) 1º ano: 100%; 2º ano: 50%

17) 5%

18) 40%

19) $ 216 000,00

20) No segundo posto, o álcool é 0,2% mais aguado que no primeiro posto.

21) $ 350,00

22) 20%

23) $ 5 000,00

24) $ 32 486,40

25) $ 30 000,00

26) $ 3 000,00

27) $ 10 000,00

28) $ 5 000,00

29) $ 6 000,00

30) $ 700 000,00

31) $ 70 000,00

32) 15%

33) $ 18 750,00

34) $ 2 000,00

35) 14,5%

36) 50,5%

37) $ 40 000,00

38) 19,5%

39) 50%

40) $ 40 000,00

41) 25%

42) $ 149,50

43) $33,\overline{3}\%$

44) $ 1 200,00

45) 42,86% aproximadamente

46) $ 89,00

47) 25% de deságio

48) $ 4,92

49) $ 343,67

50) $ 4 801,00

51) $ 3 728,50

52) $ 11 280,00

53) $ 12,00

54) 10 dependentes

55) $ 1 350,00

56) $ 3 676,00

57) $ 968,09

58) $ 902,80

Respostas dos problemas e testes de concursos

1) $ 160,00

2) $ 241,50

3) 9,64%

4) 1 L

5) 650 e 77

6) $ 1 874,40

7) 5%

8) $ 3 734,50

9) $ 27 140,00

10) A segunda solução é mais forte.
Tem 3,20% de álcool a mais do que a primeira.

11) 20,91%

12) 17%

13) Ganhou $ 732,50 ou 0,89%.

14) Foram vendidos 315 m a $ 199,80 o metro e 123 m a $ 140,60 o metro.

15) $ 4 512,00

16) $ 2 500,00

17) a

18) b

19) a

20) a

21) c

Capítulo 6
Juros simples

Respostas dos exercícios propostos

1) $ 62,50

2) $ 12,60

3) $ 50,00

4) $ 450,00

5) $ 4 127,22

6) $ 7 230,27

7) $ 42,38

8) 0,32% a.a.

9) 20% a.a.

10) $\frac{40}{9}$ anos = 4 anos, 5 meses e 10 dias

11) $ 53 296,70

12) C_1 = $ 9 860,87;
C_2 = $ 12 660,87

13) 11,11% a.m.

14) 8 anos e 4 meses

15) 3,3% a.m.

16) 2,5% a.m.

17) 40% a.m.

18) $ 15 000,00

19) Aproximadamente: i = 0,712% a.m. e
C = $ 171 734,69

20) $ 120,00 em 6 meses e $ 240,00 em 3 meses

21) i = 0,36% a.a.; C_1 = $ 514 000,00;
C_2 = $ 428 000,00

22) C_1 = $ 25 000,00;
C_2 = $ 4 000,00

23) $ 32,26

24) $ 62 400,00

25) a) $ 113,75 b) $ 333,33

26) a) $ 374,40 c) $ 1 693,28
b) $ 247,59

Respostas dos problemas e testes de concursos

1) $ 7 200,00

2) $ 730,00

3) Capital = $ 17 280,00;
juros = $ 396,00

4) $ 43 600,00

5) 7,5% a.a.

6) $ 53,47

7) 0,25% a.m.

8) Capital = $ 22 500,00;
taxa = 4% a.a.

9) 15 meses

10) 8% a.a.

11) 18,4% a.a.

12) $ 160,00

13) b

14) b

15) b

16) e

17) d

18) c

19) a

20) b

21) c

22) b

23) a

24) c

25) a

26) d

Capítulo 7
Descontos simples

Respostas dos exercícios propostos

1) $ 240,00

2) 40%

3) 4 meses

4) $ 200 000,00

5) $ 3 554,64

6) 11,11% a.m.

7) 10% a.a.

8) $ 648,00

9) $ 1 200,00

10) $ 36 489,44

11) $ 152,54

12) 18,75% a.m.

13) $ 777,78

14) $ 2 400,00

15) $ 25,66

16) D_r = $ 615,38
D = $ 1 600,00
Não é razoável.

17) 5% a.a.

18) 4 meses e meio

19) 120 dias

20) Não convém aceitar a proposta.

21) 49 dias

22) 51 dias. A data é 27 de julho.

23) 33 dias

24) 6% a.a.

25) 4,4% a.m.

26) 5,2% a.m.

27) 4,5% a.m.

28) 7,35% a.m.

29) $ 10 964,91

30) 14,8%

Respostas dos problemas e testes de concursos

1) d

2) e

3) a

4) e

5) d

6) a

7) $ 50 000,00

8) $ 1 700,00

9) $ 25 000,00

10) $ 2 740,00

11) 20% a.m.

12) 20% a.m.

Testes e questões de vestibulares

1) b

2) b

3) c

4) 80 questões

5) Estaremos pagando uma quantia maior se comprarmos a prazo.

6) a) Não é vantagem pagar a prazo.
b) x = 10%

7) 80,77 g

8) a) $p = \frac{10}{9}c$
b) 42,86%

9) a) $ 2 050,00
b) $ 4 000,00

10) a) $S = 800 + 10x$
b) Aumento na taxa de comissão.

11) a) $ 273,24
b) 4,48%

12) a) 48 unidades
b) 15 unidades

13) c

14) $ 30 000,00

15) 50 L

16) À vista.

17) 9,6%

18) $ 6 000,00

19) d

20) d

21) c

22) b

23) d

24) d

25) 9 400 mulheres e 9 100 homens

26) 40%

27) $ 400 000,00

28) a

29) a) R$ 1 263,00
b) R$ 1 230,00

UNIDADE 2
MATEMÁTICA FINANCEIRA

Capítulo 8
Logaritmos

Respostas dos exercícios propostos

1) a) 5
b) $\frac{3}{2}$
c) –2
d) 1
e) –1
f) –3

2) a) $\frac{5}{8}$
b) $\frac{1}{3}$
c) 2
d) $\frac{1}{4}$

3) a) $\frac{11}{12}$
b) 9

4) a) 1
b) –1
c) n
d) $\frac{2}{3}$

5) a) 4
b) $\frac{1}{2}$
c) 4
d) 256

6) a) 14
b) 12

7) 2

8) 16

9) a) $2 \cdot \log_c a + \log_c b$
b) $3 \cdot \log_c a + 4 \cdot \log_c b$
c) $\log_c a - 2 \cdot \log_c b$
d) $\frac{1}{2} \cdot \log_c a$
e) $\log_c a - 2 \cdot \log_c b - 3 \cdot \log_c d$
f) $\frac{1}{2} \cdot \log_c a + \frac{1}{2} \cdot \log_c b - \log_c d$

10) a) 0,778 b) 1,431 c) −1,204 d) 0,176 e) 1,732 f) 0,452

11) a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{2}{81}$ c) 6 d) 4

12)

x	51	510	5 100	51 000	510 000
log x	1,708	2,708	3,708	4,708	5,708

13) a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{b}{a}$ c) $\frac{a+b}{a}$ d) $\frac{2a+b}{3a+b}$ e) $\frac{a}{2(2a+b)}$ f) $\frac{1-(a+2b)}{3b}$

14) 0,699; 2,322

15) a) −0,699 b) −1,699 c) −1,398 d) −2,398

16) a) 2,09691
b) 0,09691
c) 3,09691
d) −0,38722
e) 0,61278
f) 1,37107
g) −2,04818
h) 0,95182
i) 1,99255

17) a) 29,7
b) 3 980
c) 1,01
d) 540
e) 4 490 000
f) 0,0449
g) 0,198
h) 0,00342
i) 0,0358
j) 0,251

18) 2,8614

19) 2,63

20) a) 5,8
b) 625
c) 143
d) 13 235,98

21) 3 672

22) $ 2 284,53

Capítulo 9
Juros compostos

Respostas dos exercícios propostos

1) $ 7 600,62

2) $ 17 236,97

3) $ 191 314,74

4) $ 1 143 008,63

5) 8,57% a.m.

6) 5,94% a.m.

7) 7% a.m.

8) 39% a.a.

9) 8 meses e 20 dias

10) 14 meses e 6 dias

11) $ 448 568,08

12) $ 260 790,66

13) 15 meses e 28 dias

14) 12 meses e 1 dia

15)

Aplicação	Capital ($)	Taxa (juros compostos)	Período	Montante ($)
1				851,11
2				1 683,06
3	1 282,20			
4	5 479,17			
5		2,33%		
6			6 meses e 28 dias	
7		4,08%		
8				
9			4 meses e 19 dias	
10				

16) 2,91%

17) A aplicação a 15% por trimestre é melhor.

18) $ 6 400,00; 26,5%

19) a)

Taxa equivalente	Montante
16,61%	$ 9 248,00
60%	$ 10 119,28
15,01%	$ 15 312,50
6,99%	$ 16 875,00
4,77%	$ 15 312,50

b) Para a cota de $ 8 000,00, temos:

— — — —	1,91%	8 960,00
— — — —	4,77%	24 500,00
— — — —	4,66%	11 520,00

Para a cota de $ 10 000,00, temos:

— — — —	22,47%	22 500,00
— — — —	15%	13 225,00
— — — —	2,21%	13 000,00

20) $ 29 585,79

21) 51,11%

22) 3,16 semestres ou 19 meses

23) 62,5%

24) A aplicação a juros simples de 18% a.m. é a mais rentável.

25) n = 23,54 meses ou 23 meses e 16 dias aproximadamente.

26) 6 meses e 20 dias

Respostas dos problemas e testes de concursos

1) c

2) b

3) d

4) d

5) d

6) b

7) b

8) b

9) d

10) e

11) c

12) c

Capítulo 10
Descontos

Respostas dos exercícios propostos

1) $ 21 869,07

2) 8,77%

3) $ 16 204,08

4) $ 141 118,48

5) $ 104 453,08

6) 26% a.m.

7) $ 106 779,66

8) $ 29 267,63

9) $ 27 200,00

10) 13 meses e 16 dias

11) $ 58 945,64

12) a) $ 56 000,00
b) $ 38 115,18
c) $ 42 640,00
O desconto bancário oferece mais vantagem.

13)

Valor Nominal ($)	Taxa (% a.m.)	Período (meses)	Desconto composto ($)
			3 458,52
			2 777,60
		20 meses e 27 dias	
47 318,61			
	37,97		

14) $ 24 760,27

Respostas dos problemas e testes de concursos

1) a

2) c

3) d

4) a

5) e

6) d

7) a

Capítulo 11
Capitalização e amortização

Respostas dos exercícios propostos

1) $ 1 066,39

2) $ 171·958,19

3) $ 3 756,45

4) $ 671,04

5) 5% a.m.

6) 15 mensalidades

7) $ 682,50

8) 7% a.m.

9) 2% a.m.

10) $ 16 983,80

11) $ 14 983,62

12) $ 499,12

13) $ 15 139,11

14) $ 36 794,68

15) $ 6 424,01

16) $ 2 951,41

17) $ 1 864,91

18) 5% a.m.

19) $ 26 212,50

20) $ 107 090,26

21) 2% a.m.

22) 10 meses

23) Plano 1

24) $ 280,97

25) $ 109 161,26

26) 6 meses: 4%; 10 meses: 4%; 18 meses: 6%

27)

Entrada		Saldo
$ 7 200,00	1	2 x 14 400,00 = 28 800,00
	2	10 x 3 376,26 = 33 762,40
	3	18 x 2 094,01 = 37 692,18
$ 10 800,00	1	3 x 8 400,00 = 25 200,00
	2	6 x 4 651,86 = 27 911,16
	3	12 x 2 531,64 = 30 379,68
$ 18 000,00	1	4 x 4 500,00 = 18 000,00
	2	10 x 2 110,15 = 21 101,50
	3	24 x 1 062,85 = 25 508,40

28) O preço do sobrado 1.

29) A opção a prazo é melhor.

30) É vantajoso.

31) Não é verdade.

32) A pessoa fez um mau negócio.

33) $ 10 000,00

34) 2%: 0,1091437M
2,5%: 0,1114719M
3%: 0,1138160M

Respostas dos problemas e testes de concursos

1) c

2) a

3) e

Capítulo 12
Empréstimos e planos de amortização

Respostas dos exercícios propostos

1)

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	5 000,00	—	—	—
1	4 527,49	472,51	62,50	535,01
2	4 049,07	478,42	56,59	535,01
3	3 564,67	484,40	50,61	535,01
4	3 074,22	490,45	44,56	535,01
5	2 577,64	496,58	38,43	535,01
6	2 074,85	502,79	32,22	535,01
7	1 565,78	509,07	25,94	535,01
8	1 050,34	515,44	19,57	535,01
9	528,46	521,88	13,30	535,01
10	(acerto) 0,056	528,40	6,60	535,01
TOTAL		5 000,00	350,16	5 350,10

2)

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	—	—	—	—
1	14 001,72	990,28	600,00	1 598,28
2	12 963,51	1 038,21	560,07	1 598,28
3	11 883,77	1 079,74	518,54	1 598,28
4	10 760,84	1 122,93	475,35	1 598,28
5	9 592,99	1 167,85	430,43	1 598,28
6	8 378,43	1 214,56	383,72	1 598,28
7	7 115,29	1 263,14	335,14	1 598,28
8	5 801,62	1 313,67	284,61	1 598,28
9	4 435,40	1 366,21	232,06	1 598,28
10	3 014,53	1 420,87	177,41	1 598,28
11	1 536,84	1 477,70	120,58	1 598,28
12	(acerto) 0,04	1 536,80	61,47	1 598,28
TOTAL		15 000,00	4 179,38	19 179,36

3)

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	40 000,00	—	—	—
1	43 600,00	—	—	—
2	47 524,00	—	—	—
3	41 583,50	5 940,50	4 277,16	10 217,66
4	35 643,00	5 940,50	3 742,51	9 683,01
5	29 702,50	5 940,50	3 207,87	9 148,37
6	23 762,00	5 940,50	2 673,22	8 613,72
7	17 821,50	5 940,50	2 138,58	8 079,08
8	11 881,00	5 940,50	1 603,93	7 544,43
9	5 940,50	5 940,50	1 069,29	7 009,79
10	—	5 940,50	534,64	6 475,14
TOTAL		45 524,00	19 247,22	66 771,22

4)

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	30 000,00	—	—	—
1	23 535,88	6 464,12	3 000,00	9 464,12
2	16 425,35	7 110,53	2 353,59	9 464,12
3	8 603,76	7 821,58	1 642,54	9 464,12
4	(acerto) 0,02	8 603,74	860,38	9 464,12
TOTAL		30 000,00	7 856,51	37 856,48

5)

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	20 000,00	—	—	—
1	20 000,00	—	1 400,00	1 400,00
2	20 000,00	—	1 400,00	1 400,00
3	20 000,00	—	1 400,00	1 400,00
4	18 881,96	1 118,04	1 400,00	2 518,04
5	17 685,66	1 196,30	1 321,74	2 518,04
6	16 405,61	1 280,04	1 238,00	2 518,04
7	15 035,97	1 369,65	1 148,39	2 518,04
8	13 570,44	1 465,52	1 052,52	2 518,04
9	12 002,33	1 568,11	949,93	2 518,04
10	10 324,46	1 677,88	840,16	2 518,04
11	8 529,13	1 795,33	722,71	2 518,04
12	6 608,13	1 921,00	597,04	2 518,04
13	4 552,66	2 055,47	462,56	2 518,04
14	2 353,30	2 199,35	318,69	2 518,04
15	—	2 353,31	164,73	2 518,04
TOTAL		20 000,00	14 416,47	34 416,48

6)

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	50 000,00	—	—	—
1	40 327,83	9 672,17	833,35	10 505,52
2	30 494,45	9 833,38	672,14	10 505,52
3	20 497,18	9 997,27	508,25	10 505,52
4	10 333,29	10 163,89	341,63	10 505,52
5	—	10 333,29	172,22	10 505,52
TOTAL		50 000,00	2 527,60	52 527,60

7)

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10 000,00	—	—	—
1	10 750,00	—	750,00	—
2	11 556,25	—	806,25	—
3	12 422,97	—	866,72	—
4	13 354,69	10 000,00	931,72	13 354,69
TOTAL		10 000,00	3 354,69	13 354,69

8)

Sistema Francês

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	20 000,00	—	—	—
1	17 059,65	2 940,35	1 000,00	3 940,35
2	13 972,28	3 087,37	852,98	3 940,35
3	10 730,55	3 241,74	698,61	3 940,35
4	7 326,72	3 403,82	536,53	3 940,35
5	3 752,71	3 574,01	366,34	3 940,35
6	—	3 752,71	187,54	3 940,35
TOTAL		20 000,00	3 642,00	23 642,10

SAC

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	20 000,00	—	—	—
1	16 667,67	3 333,33	1 000,00	4 333,33
2	10 333,34	3 333,33	833,33	4 166,67
3	10 000,01	3 333,33	666,67	4 000,00
4	6 666,68	3 333,33	500,00	3 833,33
5	3 333,35	3 333,33	333,33	3 666,66
6	0,02	3 333,33	166,67	3 500,00
TOTAL		20 000,00	3 500,00	23 500,00

SAM

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	20 000,00	—	—	—
1	16 863,16	3 136,34	1 000,00	4 136,84
2	13 652,81	3 210,35	843,15	4 053,51
3	10 365,28	3 287,53	682,64	3 970,17
4	6 996,70	3 368,58	518,26	3 886,84
5	3 543,03	3 453,67	349,83	3 803,50
6	—	3 543,02	177,10	3 720,17
TOTAL		20 000,00	3 570,98	23 571,03

9) $ 2 315,66

10)

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	10 000,00	—	—	—
1	9 000,00	1 000,00	800,00	1 800,00
2	8 000,00	1 000,00	720,00	1 720,00
3	17 000,00	1 000,00	640,00	1 640,00
4	14 571,43	2 428,57	1 360,00	3 788,57
5	12 142,86	2 428,57	1 165,71	3 594,29
6	19 714,29	2 428,57	971,43	3 400,00
7	14 785,72	4 928,57	1 577,14	6 505,72
8	9 857,14	4 928,57	1 182,86	6 111,43
9	4 928,57	4 928,57	788,57	5 717,14
10	—	4 928,57	394,28	5 322,86
TOTAL		30 000,00	9 600,00	39 600,00

Testes e questões de vestibulares

1) e

2) 11 meses

3) c

4) b

5) a) $ 46 137,00
   b) $ 21 000,00

6) a) $V = (1{,}2)^n A$; $\Delta V = 1{,}2^{n-1} \cdot 0{,}2 \cdot A$
b) 6 anos

7) b

8) d

9) d

10) e

11) a

12) 1%

13) c

14) a

15) b

16) d

17) e

18) b

19) c

20) $ 354,80

BIBLIOGRAFIA

AYRES, Frank. *Matemática financeira*. São Paulo, MacGraw-Hill do Brasil, 1971.

DAMBRÓSIO, Nicolau & DAMBRÓSIO, Ubiratan. *Matemática comercial e financeira*. 30. ed. São Paulo, Nacional, 1984.

KLINE, Morris. *Matemática para los estudiantes de humanidades*. México, Fondo de Cultura Económica, 1992.

LAUREANO, José Luiz Tavares & LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto. *Segredos da Matemática financeira*. 5. ed. São Paulo, Ática, 1997.

LOCIKS, Júlio. *Matemática financeira para concursos*. 2. ed. Brasília, Vestcon, 1996.

MILONE, Giuseppe. *Curso de Matemática financeira*. São Paulo, Atlas, 1993.

POMPEO, José Nicolau & HAZZAN, Samuel. *Matemática financeira*. 4. ed. São Paulo, Atual, 1994.

SIGNIFICADO DAS SIGLAS

AFTN: Auxiliar Fiscal do Tesouro Nacional
AP-RJ: Auxiliar de Processamento do Rio de Janeiro
BB: Banco do Brasil
BC: Banco Central
CEB-DF: Companhia de Energia Elétrica de Brasília (Distrito Federal)
ESAF: Escola de Administração Fazendária
FEI-SP: Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
Metrô-SP: Companhia Metropolitana de São Paulo
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica (São Paulo)
TC-DF: Tribunal de Contas do Distrito Federal
TCU: Tribunal de Contas da União
TRT-ES: Tribunal Regional do Trabalho (Espírito Santo)
TRT-GO: Tribunal Regional do Trabalho (Goiás)
TTN: Técnico do Tesouro Nacional
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
Unicamp-SP: Universidade de Campinas (São Paulo)
Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Unesp (Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho)